ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

А.Г.Сергеев

30 июня 2013 г.

Оглавление

Глава 1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ есть анализ в бесконечномерных линейных пространствах. Этому предмету посвящено огромное количество книг разной степени подробности. В наши цели не входило написание нового учебника по функциональному анализу. Главной мотивацией было изложение курса функционального анализа, ориентированного в первую очередь на приложения в математической физике. При этом пришлось отказаться от некоторых традиционных тем, обычно включаемых в этот курс в расчете на приложения в теории дифференциальных уравнений, таких как анализ Фурье, обобщенные функции, пространства Фреше и т.д. За счет этого удалось изложить начала теории неограниченных самосопряженных операторов, включая спектральную теорему.

Исходя из поставленной задачи, мы взяли за основу курса первый том книги Рида и Саймона ”Методы современной математической физики” по той причине, что этот курс изначально ориентирован на физиков и потому отличается от других учебников по функциональному анализу специфическим набором изучаемых тем. В изложении этих тем мы, однако, иногда сильно уклонялись от указанной книги (это относится, в особенности, к спектральной теореме и главам, посвященным компактным операторам).

Подчеркнем еще раз, что предлагаемый текст - это именно текст лекций, а не учебник. Поэтому мы позволили себе снабдить его большим количеством отступлений, дополнений и замечаний, в которых большинство фактов сообщается без доказательств и которые можно игнорировать при первоначальном чтении. Их целью является расширение ”рамок” стандартного курса без значительного увеличения его объема. Задача состояла в том, чтобы предлагаемый материал можно было действительно изложить в пределах годового университетского курса.

В основу текста легли лекции, прочитанные автором слушателям Высшей школы экономики осенью 2012 – весной 2013 года. Принятое в ней разделение на отдельные лекции следует, скорее, воспринимать как выделение отдельных тем, которые не обязательно соответствующих ”реальным” лекциям (отсюда колебания в их продолжительности).

Автор благодарен А.Ю.Пирковскому, прочитавшему первоначальный текст лекций и внесшему ряд ценных замечаний, которые были учтены в окончательном варианте.

Глава 2

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

2.1 Лекция I. Евклидовы пространства

2.1.1 Определение и примеры

Определение 1. Комплексное векторное пространство V называется *евклидовым* или *пространством со скалярным произведением*, если на нем задано отображение

$$(\cdot\,,\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{C},$$

обладающее следующими свойствами:

1. $(v, v) \geq 0$, причем $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \quad (\lambda u, v) = \lambda(u, v),\ \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Из свойств (2) и (3) следует, что

$$(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w), \quad (u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda}(u, v) + \bar{\mu}(u, w)$$

для $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Пример 1. Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j.$$

Пример 2. Пространство $C[a, b]$ непрерывных комплекснозначных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

2.1.2 Ортогональные системы

Определение 2. Векторы $u, v \in V$ *ортогональны друг другу*, если $(u, v) = 0$. Система векторов $\{v_j\}$ из V называется *ортонормированной*, если

$$(v_j, v_k) = 0 \quad \text{при } j \neq k,$$
$$(v_j, v_j) = 1 \quad \text{при всех } j.$$

Нормой вектора $v \in V$ называется число $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Теорема 1 (теорема Пифагора)**.** *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^N$ есть ортонормированная система в евклидовом пространстве V. Тогда для любого $v \in V$ имеет место равенство*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |(v, e_i)|^2 + \|v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i\|^2.$$

Доказательство. Представим v в виде

$$v = \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i + \left(v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right).$$

Векторы $\sum_{i=1}^N (v, e_i) e_i$ и $v - \sum_{i=1}^N (v, e_i) e_i$ ортогональны друг другу, поэтому

$$(v, v) = \left(\sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i, \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right) + \left(v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i, v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} |(v, e_i)|^2 + \|v - \sum_{i=1}^{N} (v, e_i) e_i\|^2.$$

□

Следствие 1 (неравенство Бесселя)**.** *Если $\{e_i\}_{i=1}^N$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве V, то для любого $v \in V$ справедливо неравенство*

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{N} |(v, e_i)|^2.$$

Следствие 2 (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых $u, v \in V$ справедливо неравенство*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Доказательство. При $v = 0$ неравенство превращается в очевидное равенство. Если $v \neq 0$, то рассмотрим вектор $\frac{v}{\|v\|}$ с нормой 1. По неравенству Бесселя для любого $u \in V$ имеет место соотношение

$$\|u\|^2 \geq \left| (u, \frac{v}{\|v\|}) \right|^2 = \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2},$$

откуда

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

□

Следствие 3 (тождество параллелограмма)**.** *Для любых $u, v \in V$ имеет место тождество*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Иначе говоря, сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма, порожденного векторами u, v, равна сумме квадратов длин его сторон.

Проверьте это тождество самостоятельно.

2.2 Лекция II. Нормированные пространства

2.2.1 Определение и связь с евклидовыми пространствами

Определение 3. Комплексное векторное пространство V называется *нормированным*, если на нем задана неотрицательная функция

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

называемая *нормой*, обладающая следующими свойствами:

1. $\|v\| \geq 0$, причем $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad$ для $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad$ (неравенство треугольника).

Замечание 1. Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой, задаваемой нормой:

$$d(u,v) := \|u-v\|.$$

Тем самым, в нормированных пространствах определены понятия сходимости и полноты, используемые в метрических пространствах.

Предложение 1. *Любое евклидово пространство V является нормированным с нормой*

$$\|v\| = \sqrt{(v,v)}.$$

Доказательство. Пусть V – евклидово пространство. Свойства (1) и (2) нормы немедленно следуют из аналогичных свойств скалярного произведения на V. Свойство (3) вытекает из неравенства Коши–Буняковского:

$$\|u+v\|^2 = (u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v) = (u,u)+2\mathrm{Re}(u,v)+(v,v) \leq \\ \leq (u,u)+2|(u,v)|+(v,v) \leq (u,u)+2\sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}+(v,v) = \\ = \left(\sqrt{(u,u)}+\sqrt{(v,v)}\right)^2 \Longrightarrow \|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|.$$

□

Замечание 2. Доказанное предложение выражает скалярное произведение (v,v) через квадрат нормы $\|v\|^2$. Аналогичным образом скалярное произведение произвольных векторов $u, v \in H$ можно выразить в терминах квадратов нормы с помощью *поляризационного тождества*:

$$(u,v) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} - i\,\frac{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2}{4}.$$

2.2.2 Ограниченные линейные отображения

Определение 4. Линейное отображение (оператор) $T : V_1 \to V_2$ из нормированного пространства V_1 с нормой $\|\cdot\|_1$ в нормированное пространство V_2 с нормой $\|\cdot\|_2$ называется *ограниченным*, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|Tv\|_2 \leq C\|v\|_1 \quad \text{для всех } v \in V_1.$$

Наименьшая из таких констант C называется *нормой* $\|T\|$ *оператора* T. Иначе говоря,

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_1=1} \|Tv\|_2.$$

Предложение 2. *Пусть $T : V_1 \to V_2$ – линейное отображение из нормированного пространства V_1 в нормированное пространство V_2. Следующие условия эквивалентны:*

1. *T непрерывно в одной точке V_1.*
2. *T непрерывно во всех точках V_1.*
3. *T ограничено.*

Доказательство этого предложения оставляем в виде задачи.

Теорема 2 (теорема о ограниченном линейном отображении)**.** *Пусть $T : V_1 \to V_2$ есть ограниченное линейное отображение из нормированного пространства V_1 в полное нормированное пространство V_2. Тогда T продолжается единственным образом на пополнение $\overline{V}_1$ пространства V_1 до ограниченного линейного отображения $\widetilde{T} : \overline{V}_1 \to V_2$.*

Доказательство. Для каждого $v \in \overline{V}_1$ найдется последовательность $\{v_n\}$ векторов из V_1 такая, что $v_n \to v$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, поэтому для заданного $\epsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\|v_n - v_m\|_1 < \frac{\epsilon}{\|T\|} \quad \text{при } m, n > N.$$

Из оценки

$$\|Tv_n - Tv_m\|_2 = \|T(v_n - v_m)\|_2 \leq \|T\| \cdot \|v_n - v_m\|_1 < \epsilon$$

следует, что $\{Tv_n\}$ является последовательностью Коши в V_2. Ввиду полноты V_2 последовательность $\{Tv_n\}$ сходится к некоторому вектору $u \in V_2$.

Положим $Tv := u$ и покажем, что это определение не зависит от выбора последовательности $v_n \to v$. Действительно, если $v'_n \to v$ – другая последовательность векторов из V_1, сходящаяся к v, то по доказанному последовательность $\{Tv'_n\}$ должна сходиться к некоторому вектору $\tilde{u} \in V_2$. Но перемешанная последовательность

$$v_1, v'_1, v_2, v'_2, \ldots$$

также сходится к v. Поэтому по тем же соображениям, что и выше, последовательность образов

$$Tv_1, Tv'_1, Tv_2, Tv'_2, \ldots$$

должна иметь предел, откуда

$$\tilde{u} = \lim_{n\to\infty} Tv_n' = \lim_{n\to\infty} Tv_n = u,$$

т.е. $u = \tilde{u}$.

Продолженный оператор $\widetilde{T} : \overline{V}_1 \to V_2$ ограничен, поскольку

$$\|\widetilde{T}v\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|Tv_n\|_2 \text{ (почему?) } \leq \lim_{n\to\infty} C\|v_n\|_1 = C\|v\|_1.$$

Линейность и единственность построенного продолжения $\widetilde{T}$ проверьте самостоятельно. □

2.3 Лекция III. Отступление: элементы теории меры и интеграла Лебега

2.3.1 Меры и измеримые множества

Определение 5. Непустое семейство $\mathcal{R}$ подмножеств некоторого множества M называется *σ-кольцом*, если:

1. Объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ множеств $E_i \in \mathcal{R}$ также принадлежит $\mathcal{R}$.

2. Пересечение $E \cap F$ и разность $E \setminus F$ множеств $E, F \in \mathcal{R}$ также принадлежат $\mathcal{R}$.

В этом случае и симметрическая разность

$$E\Delta F := (E \cup F) \setminus (E \cap F) = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

двух множеств $E, F \in \mathcal{R}$ снова принадлежит $\mathcal{R}$.

Если само множество M принадлежит $\mathcal{R}$, то такое σ-кольцо $\mathcal{R}$ называется *σ-алгеброй*.

Замечание 3. Если $\mathcal{S}$ – произвольное семейство подмножеств множества M, то среди всех σ-колец, содержащих $\mathcal{S}$, имеется минимальное σ-кольцо, которое называется σ-кольцом, порожденным $\mathcal{S}$, и обозначается через $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Пример 3. Возьмем в качестве $\mathcal{S}$ совокупность всех открытых интервалов на вещественной оси $\mathbb{R}$. Порожденное ею σ-кольцо $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{R}(\mathcal{S})$ является, очевидно, σ-алгеброй, называемой *σ-алгеброй борелевских множеств* на прямой.

Определение 6. *Счетно-аддитивной мерой* на множестве M с σ-кольцом $\mathcal{R}$ называется отображение $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$, обладающее следующими свойствами:

1. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ для любых $E_i \in \mathcal{R}$ таких, что $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

2. $\mu(\emptyset) = 0$.

В дальнейшем мы будем называть такие меры также σ-аддитивными или просто мерами.

Мера μ называется *σ-конечной*, если

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

где $E_i \in \mathcal{R}$ и $\mu(E_i) < \infty$ для всех i.

Определение 7. Пусть μ есть счетно-аддитивная мера на множестве M, снабженном σ-кольцом $\mathcal{R}$. Для любого подмножества $E \subset M$ определим его *внешнюю меру* как

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{E_i\}$ множества E, т.е. счетным наборам $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ подмножеств $E_i \in \mathcal{R}$ таких, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Множество E называется *измеримым* (по Лебегу) относительно меры μ, если для любого $\epsilon > 0$ найдется множество $R \in \mathcal{R}$ такое, что

$$\mu^*(E \Delta R) < \epsilon.$$

Иначе говоря, множество E измеримо, если его можно с любой точностью приблизить множествами из $\mathcal{R}$. Заметим, что для измеримого множества E его внешняя мера $\mu^*(E)$ совпадает с $\mu(E)$.

Замечание 4. В случае, когда $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй (т.е. $M \in \mathcal{R}$), можно показать, что совокупность всех измеримых относительно μ подмножеств M также образует σ-алгебру (теорема Лебега).

2.3.2 Измеримые функции и интеграл Лебега

Определение 8. Пусть задана система $(M, \mathcal{R}, \mu)$, т.е. множество M, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{R}$ и мерой μ. Вещественнозначная функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*(относительно $\mathcal{R}$), если для любого вещественного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ множество

$$E_\lambda(f) := \{x \in M : f(x) < \lambda\}$$

измеримо. Комплекснозначная функция $f = u + iv : M \to \mathbb{C}$ измерима, если измеримы ее вещественная часть u и мнимая часть v.

Для измеримых функций можно ввести следующие понятия сходимости:

1. *равномерная сходимость* последовательности f_n измеримых функций на множестве $E \subset M$ к измеримой функции f означает, что

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty;$$

2. *сходимость почти всюду* последовательности f_n измеримых функций на множестве $E \subset M$ к измеримой функции f означает, что
$$f_n(x) - f(x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$
для всех $x \in E$, кроме некоторого множества меры нуль;

3. *сходимость по мере* последовательности f_n измеримых функций на множестве $E \subset M$ к измеримой функции f означает, что для любого $\epsilon > 0$ мера множества
$$\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$
стремится к нулю при $n \to \infty$.

Ясно, что равномерная сходимость влечет за собой сходимость как почти всюду, так и сходимость по мере. С другой стороны, можно показать, что для измеримых подмножеств $E \subset M$ конечной меры (т.е. таких, что $\mu(E) < \infty$) из сходимости $f_n \to f$ почти всюду на E вытекает и сходимость $f_n \to f$ по мере μ.

Важную роль для дальнейшего играет следующая

Теорема 3. *Множество измеримых функций замкнуто относительно сходимости почти всюду.*

Перейдем к изучению интегрируемых функций и понятию интеграла.

Пусть задана система $(M, \mathcal{R}, \mu)$, т.е. множество M, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{R}$ и мерой μ. Назовем измеримую функцию f на M *простой*, если она принимает не более, чем счетное число значений. Такую функцию можно записать в виде
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x), \tag{2.1}$$
где E_n – измеримые подмножества M такие, что $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, а χ_E обозначает характеристическую функцию подмножества $E \subset M$:
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E; \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

Назовем простую функцию f вида (2.1) *интегрируемой*, если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \mu(E_n)$$
сходится. Это определение не зависит от выбора представления функции f в виде ряда (2.1).

Обозначим множество всех интегрируемых простых функций через $\mathcal{S}(M, \mu)$. Определим *интеграл* от интегрируемой простой функции $f \in \mathcal{S}(M, \mu)$ по измеримому множеству $E \in \mathcal{R}$ формулой
$$\int_E f d\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu(E \cap E_n).$$

Множество интегрируемых простых функций $\mathcal{S}(M,\mu)$ является линейным пространством, а соответствие $f \mapsto \int_E f d\mu$ задает на этом пространстве линейный функционал для любого $E \in \mathcal{R}$. С другой стороны, соответствие $E \mapsto \int_E f d\mu$ задает счетно-аддитивную функцию на $\mathcal{R}$.

Будем называть функции из $\mathcal{S}(M,\mu)$ *эквивалентными*, если они совпадают почти всюду на M по мере μ. Тогда множество классов эквивалентности функций из $\mathcal{S}(M,\mu)$, обозначаемое через $S(M,\mu)$, является метрическим пространством, метрика на котором задается формулой

$$d_1(f,g) := \int_M |f(x)-g(x)| d\mu(x).$$

Однако это пространство не является полным, что мотивирует следующее определение.

Определение 9. Функция f на пространстве M, наделенном σ-алгеброй $\mathcal{R}$ и мерой μ, называется *интегрируемой по мере* μ, если найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из $S(M,\mu)$ такая, что

1. последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в $S(M,\mu)$ относительно метрики $d_1(f,g)$;
2. $f_n \to f$ почти всюду относительно меры μ на M.

Пространство функций на M, интегрируемых по мере μ, обозначается через $\mathcal{L}^1(M,\mu)$, а соответствующее множество классов эквивалентности таких функций — через $L^1(M,\mu)$.

Если мера μ на M конечна, т.е. $\mu(M) < \infty$, то всякая ограниченная измеримая функция f на M принадлежит $L^1(M,\mu)$. Этот результат допускает следующее естественное обобщение. Назовем измеримую функцию f на M *существенно ограниченной*, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$|f(x)| \le C \quad \text{почти всюду на } M.$$

Наименьшую из констант C, удовлетворяющих этому условию, назовем *существенной верхней гранью* функции f и обозначим через $\operatorname{ess\,sup}_M |f|$. Множество классов эквивалентности существенно ограниченных функций на M обозначается через $L^{\infty}(M,\mu)$. Это полное метрическое пространство относительно метрики

$$d_{\infty}(f,g) := \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)-g(x)|.$$

Если $\mu(M) < \infty$, то $L^{\infty}(M,\mu) \subset L^1(M,\mu)$.

Определим теперь интеграл от интегрируемой функции, продолжая его по непрерывности с пространства $S(M,\mu)$ на пространство $L^1(M,\mu)$. Более подробно, если функция $f \in L^1(M,\mu)$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность функций из $S(M,\mu)$, сходящаяся к f почти всюду по мере μ, то полагаем по определению

$$\int_E f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Этот предел существует для любого измеримого подмножества $E \in \mathcal{R}$ и не зависит от выбора фундаментальной последовательности $\{f_n\}$, сходящейся почти всюду к функции f.

Определение 10. Определенный таким образом функционал $\int_E f d\mu$ называется *интегралом Лебега* от интегрируемой функции f по измеримому множеству E.

Также, как в случае простых функций, множество интегрируемых функций $L^1(M, \mu)$ является линейным пространством, а соответствие $f \mapsto \int_E f d\mu$ задает на этом пространстве линейный функционал для любого $E \in \mathcal{R}$, а соответствие $E \mapsto \int_E f d\mu$ определяет счетно-аддитивную функцию на $\mathcal{R}$. Множество $L^1(M, \mu)$ является метрическим пространством относительно метрики

$$d_1(f, g) := \int_M |f(x) - g(x)| d\mu(x).$$

Кроме того, справедлива следующая

Теорема 4. *Пространство $L^1(M, d\mu)$ полно.*

Мы приведем доказательство этой теоремы чуть позже, после того, как сформулируем несколько важных утверждений о сходимости интегрируемых функций.

Теорема 5 (теорема Б.Леви о монотонной сходимости)**.** *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть монотонно возрастающая последовательность интегрируемых функций f_n. Обозначим через $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ поточечный предел функций $f_n(x)$ (допуская значение $f = \infty$). Если интегралы $\int_M f_n d\mu$ ограничены в совокупности, то предельная функция f интегрируема,*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n d\mu$$

и $d_1(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$.

Если же предел справа равен $+\infty$, то функция f не интегрируема.

Теорема 6 (теорема Лебега об ограниченной сходимости)**.** *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых функций сходится почти всюду по мере μ к функции f. Если существует интегрируемая функция g такая, что*

$$|f_n(x)| \le g(x)$$

для всех n почти всюду по мере μ, то предельная функция f интегрируема, $d_1(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

для любого измеримого подмножества $E \in \mathcal{R}$.

Теорема 7 (теорема Фату)**.** *Предположим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых неотрицательных функций сходится почти всюду к функции f, причем интегралы*

$$\int_M f_n d\mu \le C$$

ограничены в совокупности. Тогда предельная функция f интегрируема и

$$\int_M f d\mu \le C.$$

Доказательство теоремы 4. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность функций из $L^1(M, d\mu)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что члены последовательности $\{f_n\}$ удовлетворяют оценке

$$d_1(f_n, f_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

Рассмотрим ряд

$$|f_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|.$$

Частичные суммы этого ряда

$$g_N(x) := |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{N} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

интегрируемы, причем интегралы от них ограничены в совокупности. Поэтому по теореме Б.Леви о монотонной сходимости функции $\{g_N\}$ сходятся почти всюду к некоторой интегрируемой функции g, которая, тем самым, почти всюду конечна на M. Отсюда следует, что и ряд

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

сходится почти всюду к некоторой функции f. Частичные суммы этого ряда, совпадающие с

$$f_N(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{N} (f_{n+1}(x) - f_n(x)),$$

ограничены по модулю интегрируемой функцией g. Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости $d_1(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $f_n \to f$ в пространстве $L^1(M, d\mu)$.

Еще одним важным свойством интеграла Лебега является его абсолютная непрерывность. Точнее, справедлива следующая

Теорема 8. *Пусть f – интегрируемая функция на M. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon$$

для любого измеримого подмножества $E \in \mathcal{R}$ с мерой $\mu(E) < \delta$.

2.3.3 Интеграл Лебега–Стилтьеса и борелевские меры на вещественной оси

Рассмотрим один из важных примеров теории, развитой в предыдущих параграфах, применительно к случаю функций, заданных на вещественной оси.

Пусть $\alpha(x)$ есть произвольная неубывающая функция на вещественной оси, т.е. $\alpha(x) \geq \alpha(y)$, если $x > y$. Для такой функции определены пределы справа

$\lim_{\epsilon\to 0+}\alpha(x+\epsilon) =: \alpha(x+0)$ и слева $\lim_{\epsilon\to 0+}\alpha(x-\epsilon) =: \alpha(x-0)$. Положим меру интервала (a,b) равной

$$\mu_\alpha(a,b) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0).$$

Определенная таким образом функция на интервалах продолжается до счетно аддитивной меры μ_α на всей алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских множеств на прямой.

Построенная мера характеризуется следующим свойством регулярности:

$$\mu_\alpha(B) = \sup\{\mu_\alpha(C):\ C\subset B,\ C \text{ компакт}\} \\ = \inf\{\mu_\alpha(U):\ B\subset U,\ U \text{ открыто}\},\ B\in\mathcal{B}.$$

Кроме того, $\mu_\alpha(C)<\infty$ для любого компактного подмножества $C\subset\mathbb{R}$. Меру, обладающую указанными свойствами регулярности, будем называть *борелевской*. Интеграл Лебега по мере μ_α называется *интегралом Лебега–Стилтьеса*, а соответствующее пространство интегрируемых функций обозначается через $L^1(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$.

Перейдем к конкретным примерам мер μ_α и отвечающих им интегралов.

Пример 4. Пусть α есть непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\mu_\alpha(a,b) = \int_a^b \frac{d\alpha}{dx}\,dx,$$

где dx – мера Лебега. В этом случае

$$\int_a^b f d\mu_\alpha = \int_a^b f\,\frac{d\alpha}{dx}\,dx,$$

т.е. интеграл Лебега–Стилтьеса сводится в этом случае к интегралу Лебега с весом $\frac{d\alpha}{dx}$.

Пример 5. Пусть $\alpha(x)$ есть характеристическая функция полупрямой $[0,+\infty)$. Тогда $\mu_\alpha(a,b)=1$, если интервал (a,b) содержит 0, и $\mu_\alpha(a,b)=0$, если $0\notin(a,b)$. Интеграл Лебега–Стилтьеса, порожденный мерой μ_α, равен в этом случае

$$\int f d\mu_\alpha = f(0).$$

Построенная мера называется *мерой Дирака*. Пространство $L^1(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ в этом случае является одномерным векторным пространством.

Пример 6. Обозначим через S подмножество отрезка $[0,1]$ следующего вида

$$S = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})\cup(\frac{1}{27},\frac{2}{27})\cup\ldots\cup(\frac{25}{27},\frac{26}{27})\cup\ldots.$$

Иначе говоря, на каждом шаге мы делим интервалы, не вошедшие в S на предыдущем шаге, на три части и добавляем к S средние части. Лебегова мера S равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\ldots = 1.$$

Множество $C = [0, 1] \setminus S$ называется *канторовым множеством*. Если представить каждое число из отрезка $[0, 1]$ троичной дробью, то C будет состоять из чисел, не содержащих в своем троичном разложении единиц. Множество C является несчетным множеством меры нуль. Чтобы убедиться в его несчетности, достаточно рассмотреть взаимно-однозначное отображение C на отрезок $[0, 1]$, которое определяется следующим образом. В троичном разложении числа из C заменяем все цифры 2 на 1 и рассматриваем полученный результат как двоичное разложение числа из $[0, 1]$.

Построим теперь функцию $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$, полагая $\alpha(x) = 1/2$ на интервале $(1/3, 2/3)$, $\alpha(x) = 1/4$ на интервале $(1/9, 2/9)$, $\alpha(x) = 3/4$ на интервале $(7/9, 8/9)$ и т.д. Продолжение функции, определяемой таким образом на множестве S, до непрерывной функции на всем отрезке $[0, 1]$ обозначается той же буквой α и называется *канторовой лестницей*. Построенная функция $\alpha(x)$ имеет производную для почти всех $x \in [0, 1]$ относительно меры Лебега, причем эта производная равна нулю.

Построим по функции $\alpha(x)$ меру μ_α. Так как функция $\alpha(x)$ непрерывна, то $\mu_\alpha(\{x\}) = 0$ для любого одноточечного множества $\{x\}$. Эта мера сосредоточена на канторовом множестве C в том смысле, что

$$\mu_\alpha([0, 1] \setminus C) = \mu_\alpha(S) = 0.$$

С другой стороны, лебегова мера C равна нулю. Тем самым, мера μ_α и мера Лебега "живут" на разных, дополнительных друг к другу, подмножествах из $[0, 1]$.

Рассмотренные примеры на самом деле моделируют поведение основных типов борелевских мер.

Пусть μ – борелевская мера на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через

$$P = \{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) \neq 0\}$$

– *атомарное множество* меры μ, точки которого называются *атомами* меры μ. Так как мера μ регулярна, то множество ее атомов не более, чем счетно. Определим *атомарную компоненту* меры μ, полагая

$$\mu_p(E) = \sum_{x \in P \cap E} \mu(\{x\}) = \mu(P \cap E).$$

Тогда μ_p является борелевской мерой на $\mathbb{R}$, а разность $\mu_c := \mu - \mu_p$ называется *непрерывной компонентой* меры μ. Очевидно, $\mu_c(\{x\}) = 0$, т.е. мера μ_c не имеет атомов, тогда как μ_p, напротив, состоит только из атомов, т.е.

$$\mu_p(E) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\})$$

для любого борелевского множества E.

Определение 11. Борелевская мера μ называется *непрерывной*, если она не имеет атомов. Она называется *атомарной* или *чисто точечной*, если

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\})$$

для любого борелевского множества E.

Теорема 9. *Любая борелевская мера μ представляется единственным образом в виде*

$$\mu = \mu_p + \mu_c,$$

где мера μ_p атомарная, а мера μ_c непрерывна.

Определение 12. Мера μ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры Лебега (обозначение: $d\mu = f dx$), если существует локально интегрируемая функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ (т.е. $\int_a^b |f| dx < \infty$ для любого отрезка $[a, b]$) такая, что

$$\int g d\mu = \int g f dx$$

для любой функции $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$.

Определение 13. Мера μ называется *сингулярной* относительно меры Лебега, если $\mu(E) = 0$ для какого-либо борелевского подмножества E полной лебеговой меры, т.е. такого, что дополнение $\mathbb{R} \setminus E$ имеет лебегову меру нуль.

Теорема 10 (теорема Лебега о разложении)**.** *Пусть μ – борелевская мера. Тогда она представима единственным образом в виде*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing},$$

где мера μ_{ac} абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера μ_{sing} сингулярна относительно нее.

Из двух приведенных теорем о разложении мер следует, что произвольная борелевская мера на вещественной оси представляется каноническим образом в виде

$$\mu = \mu_p + \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_s, \tag{2.2}$$

где μ_p – атомарная компонента μ, сингулярная относительно меры Лебега, μ_s – непрерывная мера, сингулярная относительно меры Лебега, и μ_{ac} – мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.

2.3.4 Абстрактные меры и теорема Фубини

Вернемся к случаю общих пространств с мерой, т.е. рассмотрим пространство M, наделенное σ-кольцом измеримых подмножеств $\mathcal{R}$ и счетно-аддитивной мерой μ.

Определение 14. Пусть ν – другая мера на пространстве $(M, \mathcal{R}, \mu)$. Она называется *сингулярной* относительно меры μ, если существует такое множество $E \in \mathcal{R}$, что

$$\mu(E) = 0 \text{ и } \nu(M \setminus E) = 0.$$

Мера ν *абсолютно непрерывна относительно меры* μ, если $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$ для любого $E \in \mathcal{R}$.

Теорема 11 (теорема Радона–Никодима)**.** *Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f такая, что*

$$\nu(E) = \int f(x)\chi_E(x)(x)d\mu(x)$$

для любого $E \in \mathcal{R}$ (χ_E обозначает характеристическую функцию множества E). Функция f однозначно определяется мерой ν почти всюду по мере μ.

Теорема 12 (теорема Лебега о разложении)**.** *Пусть ν – мера на пространстве с мерой $(M, \mathcal{R}, \mu)$. Тогда она представима единственным образом в виде*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_{sing},$$

где мера ν_{ac} абсолютно непрерывна относительно меры μ, а мера ν_{sing} сингулярна относительно μ.

Определение 15. Пусть $(M, \mathcal{R})$ и $(N, \mathcal{S})$ – два множества, наделенные σ-алгебрами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ соответственно. Тогда σ-алгебра $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ по определению есть наименьшее σ-алгебра, содержащая все множества вида

$$\{E \times F : \; E \in \mathcal{R}, F \in \mathcal{S}\}.$$

Предложение 3. *Пусть $(M, \mathcal{R})$ и $(N, \mathcal{S})$ наделены мерами μ и ν соответственно. Если функция $f : M \times N \to \mathbb{R}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$, то для любого $x \in M$ функция $y \mapsto f(x, y)$ на N измерима относительно $\mathcal{S}$ и для любого $y \in N$ функция $x \mapsto f(x, y)$ на M измерима относительно $\mathcal{R}$. Если интеграл*

$$\int_N f(x, y)d\nu(y)$$

существует для почти всех $x \in M$, то функция

$$x \longmapsto \int_N f(x, y)d\nu(y)$$

измерима относительно $\mathcal{R}$ и аналогичное свойство выполняется для интеграла

$$\int_M f(x, y)d\mu(x)$$

и функции

$$y \longmapsto \int_M f(x, y)d\mu(x).$$

Теорема 13 (теорема Фубини)**.** *Пусть f – измеримая функция на пространстве $M \times N$ относительно σ-алгебры $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$, где $(M, \mathcal{R}, \mu)$ и $(N, \mathcal{S}, \nu)$ – два пространства с мерами μ и ν соответственно. Справедливо следующее утверждение:*

$$\int_M \left(\int_N |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_N \left(\int_M |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

Если эти интегралы конечны, то

$$\int_M \left(\int_N f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_N \left(\int_M f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Теорема 14 (теорема о произведении мер)**.** *Пусть μ и ν – σ-конечные меры на пространствах $(M, \mathcal{R})$ и $(N, \mathcal{S})$ соответственно. Тогда существует единственная мера $\mu \otimes \nu$ на пространстве $(M \times N, \mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$, обладающая следующим свойством:*

$$(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$$

для любых $E \in \mathcal{R}$, $F \in \mathcal{S}$ (при этом считается по определению, что $0 \cdot \infty = 0$). Если f – измеримая функция на пространстве $(M \times N, \mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$, то

$$\int_M \left(\int_N |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_{M \times N} |f| d(\mu \otimes \nu) < \infty.$$

В этом случае

$$\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) = \int_M \left(\int_N f(x,y| d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Меру $\mu \otimes \nu$ можно описать следующим образом. Если $G \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ и $G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \times F_i)$, то

$$(\mu \otimes \nu)(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\nu(F_i).$$

Более того, для любого $G \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ справедливо соотношение

$$(\mu \otimes \nu)(G) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\nu(F_i) : \ G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \times F_i) \right\}.$$

В частности, множество G можно приблизить с любой точностью счетными объединениями "прямоугольников" $E_i \times F_i$.

2.4 Лекция IV. Гильбертовы пространства

2.4.1 Определение и примеры

Определение 16. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым*.

Определение 17. Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 называются *изоморфными*, если существует линейный оператор U, отображающий биективно H_1 на H_2 такой, что

$$(Uv, Uw)_{H_2} = (v, w)_{H_1} \quad \text{для всех } v, w \in H_1.$$

Оператор U, обладающий указанным свойством, называется *унитарным*.

Пример 7 (пространство $L^2(a,b)$)**.** Определим пространство $L^2(a,b)$ как множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на интервале (a,b), для которых конечен интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

по мере Лебега. Скалярное произведение в $L^2(a,b)$ задается формулой

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Оно корректно определено благодаря неравенству

$$\left|f(x)\overline{g(x)}\right| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2,$$

из которого вытекает, что

$$\int_a^b \left|f(x)\overline{g(x)}\right| dx < \infty.$$

Также, как в теореме 4 из п.2.3.2 можно показать, что пространство $L^2(a,b)$ полно. Более того, оно совпадает с пополнением пространства $C[a,b]$ по норме

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Пример 8 (пространство ℓ^2)**.** Это пространство состоит из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел x_n, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в ℓ^2 задается формулой

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Проверьте его полноту самостоятельно.

Пример 9 (прямая сумма)**.** *Прямой суммой* гильбертовых пространств H_1 и H_2 называется гильбертово пространство $H_1 \oplus H_2$, состоящее из пар (v_1, v_2), где $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$, наделенное скалярным произведением

$$((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = (u_1,v_1)_{H_1} + (u_2,v_2)_{H_2}.$$

Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность гильбертовых пространств. *Прямой суммой*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

этих пространств называется гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v_n \in H_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{H_n}^2 < \infty.$$

2.4.2 Ортогональная проекция

Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда E, наделенное скалярным произведением, унаследованным из H, само является гильбертовым пространством. Обозначим через $E^{\perp}$ подпространство, состоящее из векторов $u \in H$, ортогональных к E, т.е. удовлетворяющих условию: $(u, v) = 0$ для всех $v \in E$. Это подпространство линейно и замкнуто (проверьте это!) и потому также является гильбертовым пространством с индуцированным скалярным произведением. Оно называется *ортогональным дополнением* к E.

Лемма 1. *Для любого $v \in H$ найдется единственный вектор $w \in E$, ближайший к v.*

Доказательство. Расстояние от v до подпространства E равно по определению

$$d = \inf_{u \in E} \|v - u\|.$$

Выберем последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in E$, для которой $\|v - u_n\| \to d$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - v) - (u_m - v)\|^2 \text{ (тождество параллелограмма)} \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - \|(u_n - v) + (u_m - v)\|^2 \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - 4\|v - \frac{u_n + u_m}{2}\|^2 \\ &\le 2\|u_n - v\|^2 + 2\|u_m - v\|^2 - 4d^2 \text{ (поскольку } \frac{u_n + u_m}{2} \in E).\end{aligned}$$

Последнее выражение при $m, n \to \infty$ стремится к $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$. Следовательно, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши, сходящаяся к некоторому элементу $w \in H$, который, ввиду замкнутости E, должен принадлежать E. При этом $\|v - w\| = d$, т.е. вектор w удовлетворяет условию леммы.

Если $w' \in E$ – другой элемент, удовлетворяющий условию $\|v - w'\| = d$, то перемешанная последовательность $w, w', w, w', \ldots$ должна сходиться к некоторому элементу из E (это доказывается также, как в первой части доказательства), откуда следует, что $w = w'$. □

Теорема 15 (теорема об ортогональной проекции)**.** *Пусть H есть гильбертово пространство и E – его замкнутое линейное подпространство. Тогда любой элемент $v \in H$ однозначно представляется в виде*

$$v = u + w,$$

где $u \in E$, $w \in E^{\perp}$.

Доказательство. Обозначим через u вектор из E, ближайший к v, и положим: $w := v - u$. Покажем, что $w \in E^{\perp}$. Действительно, обозначим норму $\|v - u\|$ через d. Тогда для любого $z \in E$ и любого $t \in \mathbb{R}$ будем иметь

$$d^2 \le \|v - (u + tz)\|^2 = \|w - tz\|^2 = d^2 - 2t\mathrm{Re}\,(w, z) + t^2\|z\|^2,$$

откуда

$$2t\mathrm{Re}\,(w,z) \le t^2\|z\|^2 \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\,(w,z) = 0$. Проводя такое же рассуждение с заменой t на it, покажем, что и $\mathrm{Im}\,(w,z) = 0$, т.е. $(w,z) = 0$ для любых $z \in E$. Тем самым, $w \in E^\perp$.

Если $v = u_1 + w_1$ – другое представление, удовлетворяющее условиям теоремы, то

$$u - u_1 = w_1 - w := z \in E \cap E^\perp,$$

откуда следует, что $(z,z) = 0$, т.е. $z = 0 \Longrightarrow u = u_1, w = w_1$. □

Замечание 5. Из доказанной теоремы вытекает, что пространство H изоморфно прямой сумме $E \oplus E^\perp$, причем указанный изоморфизм задается отображением

$$E \oplus E^\perp \ni (u,w) \longmapsto u + v \in H.$$

2.4.3 Сопряженное пространство

Определение 18. Пространство непрерывных линейных функционалов на H, т.е. непрерывных линейных отображений $H \to \mathbb{C}$, называется *пространством, сопряженным к* H, и обозначается через H^*.

Теорема 16 (теорема Рисса)**.** *Для любого непрерывного линейного функционала $f \in H^*$ найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что*

$$f(v) = (v,\xi) \quad \textit{для любого } v \in H. \tag{2.3}$$

Доказательство. Обозначим через N множество всех $v \in H$ таких, что $f(v) = 0$. Это множество линейно и замкнуто (ввиду непрерывности f), т.е. является замкнутым линейным подпространством в H.

Если $N = H$, то в качестве ξ можно взять $\xi = 0$. Если же $N \neq H$, то по теореме об ортогональной проекции в $N^\perp$ найдется ненулевой элемент ξ_0. Заметим, что вектор

$$f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v \in N \text{ для любого } v \in H,$$

поскольку функционал f на этом векторе равен нулю. Поэтому

$$(f(v)\xi_0 - f(\xi_0)v, \xi_0) = f(v)(\xi_0,\xi_0) - f(\xi_0)(v,\xi_0) = 0,$$

откуда

$$f(v)(\xi_0,\xi_0) = f(\xi_0)(v,\xi_0).$$

Следовательно, соотношение (2.3) выполняется для вектора

$$\xi := \overline{f(\xi_0)}\frac{\xi_0}{(\xi_0,\xi_0)}.$$

Единственность вектора ξ, удовлетворяющего соотношению (2.3), очевидна. □

Замечание 6. Из доказательства теоремы Рисса следует, что

$$H = N \oplus \{\lambda\xi_0 : \ \lambda \in \mathbb{C}\},$$

так как любой элемент $v \in H$ представляется в виде

$$v = \left(v - \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0\right) + \frac{f(v)}{f(\xi_0)}\xi_0 \in N \oplus \{\lambda\xi_0\}.$$

Замечание 7. Полезно иметь в виду также следующий комплексно-сопряженный вариант теоремы Рисса. Пусть $f : H \to \mathbb{C}$ – сопряженно-линейный функционал на H, т.е. аддитивный функционал, удовлетворяющий условию: $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in H$. Тогда существует единственный элемент $\xi \in H$ такой, что $f(v) = (\xi, v)$ для любого $v \in H$. Для доказательства достаточно применить теорему 16 к функционалу $\overline{f}$.

Определение 19. Линейный функционал $f : H \to \mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$|f(v)| \le C\|v\| \quad \text{для всех } v \in H.$$

Наименьшая из таких констант C называется *нормой функционала* f и обозначается

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)|.$$

Замечание 8. Это определение является ни чем иным, как спецификацией определения ограниченного линейного оператора на случай линейных отображений $H \to \mathbb{C}$. Также, как для линейных операторов, справедливо следующее утверждение: линейный функционал f ограничен $\iff$ f непрерывен хотя бы в одной точке $H \iff f$ непрерывен всюду на H.

Замечание 9 (дополнение к теореме Рисса). В условиях теоремы Рисса

$$\|f\|_{H^*} = \|\xi\|_H.$$

Действительно,

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |(v, \xi)| \text{ (неравенство Коши–Буняковского)}$$
$$\le \sup_{\|v\|=1} (\|v\| \cdot \|\xi\|)) = \|\xi\|.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| \ge \left| f\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right| = \left|\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}, \xi\right)\right| = \|\xi\|.$$

Следовательно, $\|f\|_{H^*} = \|\xi\|_H$.

С учетом приведенного дополнения из теоремы Рисса вытекает

Теорема 17. *Отображение*

$$H \ni \xi \longmapsto f(v) = (v, \xi),\ v \in H,$$

устанавливает сопряженно-линейную изометрию $\xi \mapsto f$ пространства H на сопряженное к нему пространство H^*.

Еще одним следствием теоремы Рисса является теорема о представлении полуторалинейных форм операторами.

Определение 20. Функция $B : H \times H \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если:

1. B линейна по первому аргументу, т.е.

$$B(\lambda u + \mu v, w) = \lambda B(u, w) + \mu B(v, w);$$

2. B антилинейна по второму аргументу, т.е.

$$B(u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda} B(u, w) + \bar{\mu} B(u, w).$$

Полуторалинейная форма *ограничена*, если

$$|B(u, v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \text{ для некоторой константы } C > 0. \tag{2.4}$$

Предложение 4. *Пусть B – ограниченная полуторалинейная форма на H. Тогда существует единственный ограниченный линейный оператор $T : H \to H$ такой, что*

$$B(u, v) = (u, Tv) \text{ для любых } u, v \in H.$$

Доказательство. Фиксируем вектор $v \in H$. Тогда из определения ограниченной полуторалинейной формы следует, что $B(\cdot, v)$ является непрерывным линейным функционалом на H. Поэтому по теореме Рисса найдется единственный элемент $\xi \in H$ такой, что

$$B(u, v) = (u, \xi) \text{ для любого } u \in H.$$

Положим $Tv = \xi$. Ясно, что $\|Tv\| \leq C\|v\|$, где C – константа из формулы (2.4). Кроме того, отображение T аддитивно и

$$(u, T(\lambda v)) = B(u, \lambda v) = \bar{\lambda} B(u, v) = \bar{\lambda}(u, Tv) = (u, \lambda Tv),$$

т.е. T линейно. Единственность построенного оператора T очевидна. □

Замечание 10. Норма оператора T, построенного в доказанном предложении, совпадает с наименьшей константой C из неравенства (2.4).

2.5 Лекция V.Ортонормированные базисы

2.5.1 Отступление: лемма Цорна

Определение 21. *Частичным порядком* на множестве X называется семейство упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in X$, обозначаемых через $x \prec y$, которое обладает следующими свойствами:

1. если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$;

2. всегда $x \prec x$;

3. если одновременно $x \prec y$ и $y \prec x$, то $x = y$.

Множество X с частичным порядком называется *частично упорядоченным*.

Порядок называется *линейным*, если для любых $x, y \in X$ выполняется по крайней мере одно из следующих условий: либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Множество с таким порядком называется *линейно упорядоченным*.

Пусть X есть частично упорядоченное множество и Y – его подмножество. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* множества Y, если $y \prec x$ для любого $y \in Y$. *Максимальным элементом* частично упорядоченного множества X называется такой его элемент x, что условие $x \prec y$ для некоторого $y \in X$ влечет $y = x$.

Лемма 2 (лемма Цорна)**.** *Пусть X – непустое частично упорядоченное множество такое, что любое его линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань. Тогда в X существует максимальный элемент.*

2.5.2 Ортонормированные базисы

Определение 22. *Ортонормированным базисом* в H называется полная ортонормированная система, т.е. ортонормированная система, которую нельзя расширить до содержащей ее ортонормированной системы.

Теорема 18 (теорема об ортонормированном базисе)**.** *Любое гильбертово пространство H обладает ортонормированным базисом.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех ортонормированных систем в H. Оно непусто, поскольку содержит, например, ортнормированные системы, состоящие из единственного вектора вида $v/\|v\|$. Введем на $\mathcal{S}$ отношение частичного порядка: система $S_1 \prec$ система $S_2 \iff S_1 \subset S_2$.

Если $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{S}$, то $\cup_{\alpha\in A} S_\alpha$ также является ортонормированной системой из $\mathcal{S}$, содержащей все S_α, и потому является верхней гранью линейно упорядоченного подмножества $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$. По лемме Цорна $\mathcal{S}$ содержит максимальный элемент, который и является ортонормированным базисом в H. □

2.5.3 Теорема Парсеваля

Прежде, чем переходить к формулировке этой теоремы, докажем следующий критерий сходимости попарно ортогональных векторов.

Предложение 5. *Пусть $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность попарно ортогональных векторов из H. Тогда выполнение любого из трех следующих условий влечет за собой выполнение остальных двух:*

1. *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится по норме H;*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$;*
3. *ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u, v_n)$ сходится при каждом $u \in H$.*

Доказательство. Так как $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$, то для любых n, m, $n \leq m$, выполняется равенство:

$$\|v_n + \ldots + v_m\|^2 = \|v_n\| + \ldots + \|v_m\|^2.$$

Отсюда следует, что условия (1) и (2) в этом случае эквивалентны.

Если выполняется условие (2): $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$, то частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2$ образуют последовательность Коши в H, которая, ввиду полноты H, имеет предел. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем, что условие (3) в этом случае выполняется.

Предположим теперь, что выполнено условие (3). Рассмотрим последовательность линейных функционалов $f_n \in H^*$, задаваемых равенством

$$f_n(u) = \sum_{i=1}^{n}(u, v_i),\ u \in H.$$

По условию последовательность $\{f_n(u)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится при каждом $u \in H$. Поэтому по теореме Банаха–Штейнгауза, которую мы докажем позднее (п. II.4.3), последовательность норм $\{\|f_n(u)\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Но

$$\|f_n(u)\| = \|v_1 + \ldots + v_n\| = \left(\|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому из условия (3) вытекает условие (2), а следовательно, и условие (1). □

Теорема 19 (теорема Парсеваля)**.** *Пусть $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Тогда любой элемент $v \in H$ представляется в виде*

$$v = \sum_{\alpha \in A}(v, e_\alpha)e_\alpha, \tag{2.5}$$

причем

$$\|v\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(v, e_\alpha)|^2. \tag{2.6}$$

Доказательство. По неравенству Бесселя (см. п. 2.1.2) для любого конечного подмножества $a \subset A$ выполняется соотношение

$$\sum_{\alpha \in a} |(v, e_\alpha)|^2 \leq \|v\|^2.$$

Отсюда следует, что $(v, e_\alpha) \neq 0$ для не более, чем счетного множества индексов $\alpha \in A$. Действительно, обозначим через a_1 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $|(v, e_\alpha)| \geq 1$, через a_2 множество индексов $\alpha \in A$, для которых $1 > |(v, e_\alpha)| \geq 1/2$ и т.д. Тогда множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ счетно и исчерпывает все множество индексов $\alpha \in A$, для которых $(v, e_\alpha) \neq 0$.

Занумеруем теперь через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ все индексы из A, для которых $(v, e_\alpha) \neq 0$. Тогда последовательность частичных сумм

$$\sum_{j=1}^{n} |(v, e_{\alpha_j})|^2$$

монотонно возрастает с номером n, оставаясь ограниченной числом $\|v\|^2$. Поэтому при $n \to \infty$ она стремится к некоторому конечному пределу.

Обозначим через v_n частичную сумму вида

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j}.$$

Тогда при $m > n$ будем иметь

$$\|v_n - v_m\|^2 = \| \sum_{j=n+1}^{m} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j} \|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |(v, e_{\alpha_j})|^2.$$

Тем самым, последовательность $\{v_n\}$ является последовательностью Коши, которая сходится к некоторому элементу $v_0 \in H$. При этом

$$(v - v_0, e_{\alpha_j}) = \lim_{n\to\infty} \left(v - \sum_{k=1}^{n} (v, e_{\alpha_k}) e_{\alpha_k}, e_{\alpha_j} \right) = (v, e_{\alpha_j}) - (v, e_{\alpha_j}) = 0$$

при любом $j = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, если индекс α таков, что $\alpha \neq \alpha_j$ ни при каком j, то также

$$(v - v_0, e_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(v - \sum_{k=1}^{n} (v, e_{\alpha_k}) e_{\alpha_k}, e_\alpha \right) = 0,$$

поскольку для такого α по построению $(v, e_\alpha) = 0$. Следовательно, элемент $v - v_0$ ортогонален всем элементам e_α базиса S, откуда вытекает, ввиду максимальности S, что $v - v_0 = 0$, т.е.

$$v = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j},$$

что доказывает формулу (2.5).

Кроме того, имеем следующую цепочку равенств

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|v - \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(v - \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j}, v - \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j}) e_{\alpha_j} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j})(e_{\alpha_j}, v) - \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j})(v, e_{\alpha_j}) + \sum_{j=1}^{n} (v, e_{\alpha_j})(v, e_{\alpha_j}) \right\}$$

$$= \|v\|^2 - \lim_{n\to\infty} |(v, e_{\alpha_j})|^2 = \|v\|^2 - \sum_{\alpha\in A} (v, e_\alpha)|^2,$$

что доказывает формулу (2.6). □

Определение 23. Ряд, задаваемый формулой (2.5), называется *рядом Фурье* вектора v по базису S, а его коэффициенты – *коэффициентами Фурье* вектора v относительно базиса S. Равенство (2.6) называется *равенством Парсеваля*.

2.5.4 Ортогонализация Грама–Шмидта

Ортогонализацией Грама–Шмидта называется конструкция, позволяющая построить из любой последовательности линейно независимых векторов ортонормированную систему.

Допустим, что нам дана последовательность $u_1, u_2, \ldots$, состоящая из линейно независимых векторов. Положим $w_1 = u_1$ и $v_1 = \frac{w_1}{w_1}$. Далее рассмотрим векторы $w_2 = u_2 - (u_2, v_1)v_1$ и $v_2 = \frac{w_2}{w_2}$. Продолжая указанный процесс построения, на n-м шаге построим векторы

$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} (u_n, v_j) v_j$$

и $v_n = \frac{w_n}{w_n}$. Иными словами, на n-м шаге вектор u_n проектируется на подпространство, натянутое на ранее построенные векторы $v_1, \ldots, v_{n-1}$, в результате чего получается вектор $\sum_{j=1}^{n-1} (u_n, v_j) v_j$ из этого подпространства. Тогда разность

$$u_n - \sum_{j=1}^{n-1} (u_n, v_j) v_j$$

есть вектор, ортогональный линейной оболочке векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

2.5.5 Сепарабельные гильбертовы пространства

Определение 24. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если оно обладает счетным плотным подмножеством.

Теорема 20. *Гильбертово пространство H сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетный ортонормированный базис. Если этот базис состоит из N векторов, то H изоморфно $\mathbb{C}^N$. Если он состоит из счетного набора векторов, то H изоморфно ℓ^2.*

Доказательство. Допустим сначала, что H сепарабельно и $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное плотное подмножество в H. Выбрасывая, если нужно, из этого подмножества некоторые векторы, можно считать, что подмножество $\{v_n\}$ состоит из линейно независимых векторов, линейная оболочка которых (т.е. совокупность конечных линейных комбинаций) плотна в H. Применяя к последовательности $\{v_n\}$ процесс ортогонализации Грама–Шмидта, построим из нее счетный ортонормированный базис в H.

Обратно, если $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H, то по теореме Парсеваля множество конечных линейных комбинаций векторов e_n плотно в H. То же самое верно и для множества конечных линейных комбинаций этих векторов с рациональными коэффициентами, а это множество уже счетно. Тем самым, H сепарабельно.

Пусть, теперь, H сепарабельно и $S = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его счетный ортонормированный базис. Рассмотрим отображение

$$U : H \longrightarrow \ell^2,\ v \longmapsto \{(v, e_n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из теоремы Парсеваля следует, что это отображение корректно определено и сюръективно, а равенство Парсеваля показывает, что оно унитарно, т.е. U – изоморфизм H на ℓ^2. Если базис S состоит из конечного числа N элементов, то это же рассуждение показывает, что H изоморфно $\mathbb{C}^N$. □

Пример 10 (ряд Фурье периодической функции)**.** Рассмотрим в качестве гильбертова пространства $H = L^2(0, 2\pi)$. Выберем в нем ортонормированный базис, задаваемый функциями

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы удостовериться в том, что $\{\varphi_n\}$ действительно образуют ортонормированный базис, достаточно проверить полноту этой системы (ее ортонормированность очевидна). Покажем, что если некоторая функция $g \in L^2(0, 2\pi)$ ортогональна всем функциям φ_n, т.е. $(g, e^{inx}) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $g = 0$. Заметим, что из условия ортогональности следует, что g ортогональна всем периодическим непрерывно дифференцируемым функциям $\varphi \in C^1_{\text{per}}[0, 2\pi]$. Действительно, для таких функций φ их ряд Фурье

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx},\ c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx,$$

равномерно сходится к функции φ, поэтому его можно почленно интегрировать, откуда следует, что $(g, \varphi) = 0$. Но функции из $C^1_{\text{per}}[0, 2\pi]$ плотны в $L^2(0, 2\pi)$ (доказательство этого факта мы оставляем в качестве задачи), поэтому функция g ортогональна всему пространству $L^2(0, 2\pi)$. Следовательно, $g = 0$.

Итак, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ есть ортонормированный базис в пространстве $L^2(0, 2\pi)$, поэтому из теоремы Парсеваля следует, что ряд Фурье любой функции из $L^2(0, 2\pi)$ сходится к ней по норме этого пространства.

2.6 Лекция VI.Тензорные произведения гильбертовых пространств

2.6.1 Определение

Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Будем временно обозначать элементы их прямой суммы $H_1 \oplus H_2$ через $u_1 \oplus u_2$, где $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$. Для $v_1 \in H_1$, $v_2 \in H_2$ обозначим через $v_1 \otimes v_2$ билинейную форму на пространстве $H_1 \oplus H_2$, задаваемую равенством

$$(v_1 \otimes v_2)(u_1 \oplus u_2) = (v_1, u_1)(v_2, u_2), \quad \text{где } u_1 \in H_1, u_2 \in H_2.$$

Определим скалярное произведение на формах указанного вида посредством

$$(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') = (v_1, v_1')(v_2, v_2').$$

Обозначим через E линейную оболочку (т.е. множество конечных линейных комбинаций) форм такого вида и продолжим на него введенное скалярное произведение по линейности. Множество E называется также *алгебраическим тензорным произведением* пространств H_1 и H_2.

Покажем, что указанное скалярное произведение корректно определено на E, т.е. не зависит от представления вектора из E в виде конечной линейной комбинации форм вида $v_1 \otimes v_2$.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если $w = \sum_{i=1}^{N} c_i(u_i \otimes v_i)$ – конечная линейная комбинация, представляющая нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$, то ее скалярное произведение с любой формой z из E равно нулю. Так как форма $z \in E$, то она представляется в виде $z = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k \otimes y_k)$, где $x_k \in H_1$, $y_k \in H_2$. Тогда получаем цепочку соотношений

$$(w, z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} c_i\bar{a}_k(u_i \otimes v_i, x_k \otimes y_k) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} c_i\bar{a}_k(u_i, x_k,)(v_i, y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} c_i\bar{a}_k(u_i \otimes v_i)(x_k \oplus y_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k\, w(x_k \oplus y_k) = 0,$$

где $w(x_k \oplus y_k) = 0$, поскольку w по условию задает нулевую форму на $H_1 \oplus H_2$.

Покажем теперь, что построенное скалярное произведение на E положительно определено. Пусть $w = \sum_{i=1}^{N} c_i(u_i \otimes v_i)$ – произвольная форма из E. Векторы $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ и $\{v_i\}_{i=1}^{N}$ порождают линейные подпространства $U \subset H_1$ и $V \subset H_2$ соответственно. Выберем в этих подпространствах ортонормированные базисы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^{N}$ соответственно и разложим векторы u_i и v_i по этим базисам. В результате получим

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varphi_j \quad \text{и} \quad v_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\psi_j,$$

так что

$$w = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}(\varphi_i \otimes \psi_j)$$

с некоторыми коэффициентами c_{ij}. Тогда

$$(w,w) = \left(\sum_{i,j} c_{ij}(\varphi_i \otimes \psi_j), \sum_{k,l} c_{kl}(\varphi_k \otimes \psi_l) \right) =$$
$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} c_{ij}\bar{c}_{kl}(\varphi_i, \varphi_k)(\psi_j, \psi_l) = \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 \geq 0.$$

Кроме того, $(w,w) = 0 \Leftrightarrow$ все $c_{ij} = 0$, т.е. $w = 0$. Следовательно, скалярное произведение положительно определено.

Определение 25. *Гильбертово тензорное произведение* $H_1 \otimes H_2$ есть пополнение алгебраического тензорного произведения E по введенному скалярному произведению.

Предложение 6. *Если* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ *и* $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ *– ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах* H_1 *и* H_2 *соответственно, то* $\{u_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ *есть ортонормированный базис в тензорном произведении* $H_1 \otimes H_2$*.*

Доказательство. Так как система $\{u_i \otimes v_j\}$ является, очевидно, ортонормированной в $H_1 \otimes H_2$, то достаточно показать, что замкнутая линейная оболочка S элементов $\{u_i \otimes v_j\}$ содержит алгебраическое тензорное произведение E. Пусть форма $w = u \otimes v \in E$, где $u \in H_1$, $v \in H_2$. Так как $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ являются базисами в пространствах H_1 и H_2 соответственно, то

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i \quad \text{и} \quad v = \sum_{j=1}^{\infty} b_j v_j,$$

причем $\sum_i |a_i|^2 < \infty$ и $\sum_j |b_j|^2 < \infty$. Тогда $\sum_{i,j} |a_i b_j| < \infty$. Поэтому по теореме Парсеваля ряд

$$\sum_{i,j} a_i b_j (u_i \otimes v_j)$$

сходится к некоторому вектору из S. Но этот вектор должен совпадать с w, поскольку

$$\|u \otimes v - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} a_i b_j (u_i \otimes v_j)\| \longrightarrow 0$$

при $N_1, N_2 \to \infty$. Следовательно, $w \in S$. □

2.6.2 Фоковское пространство

Пусть H есть гильбертово пространство и $H^n = H \otimes \ldots \otimes H$ (n раз) – его n-кратная тензорная степень. Положим по определению $H^0 = \mathbb{C}$ и рассмотрим пространство

$$F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n.$$

Оно состоит из последовательностей $v = \{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, $v_n \in H^n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|_{H^n}^2 < \infty.$$

Определим действие симметрической группы перестановок S_n на базисных элементах из H^n, полагая

$$\sigma(v_{k_1} \otimes \ldots \otimes v_{k_n}) = v_{k_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{k_{\sigma(n)}} \quad \text{для } \sigma \in S_n.$$

Оператор

$$\mathrm{Sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$$

называется *оператором симметризации*. Область значений оператора Sym_n, состоящая из элементов в H^n, инвариантных относительно любых перестановок, называется *n-кратной симметричной тензорной степенью* $\mathrm{Sym}_n(H)$ пространства H. Положим

$$F_b(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sym}_n(H).$$

Это пространство называется *симметричным* или *бозонным пространством Фока* над H.

Аналогичным образом можно ввести *оператор альтернирования* на H^n, полагая

$$\mathrm{Alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \sigma,$$

где $\mathrm{sgn}(\sigma)$ – знак (четность) перестановки σ, равный 0 на четных перестановках и 1 на нечетных. Область значений оператора Alt_n, состоящая из антисимметричных элементов в H^n, называется *n-кратной антисимметричной тензорной степенью* $\mathrm{Alt}_n(H)$ пространства H. Пространство

$$F_f(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Alt}_n(H)$$

называется *антисимметричным* или *фермионным пространством Фока* над H.

Краткое содержание и библиографические указания к главе 2

Лекция 2.1 содержит основные сведения по теории евклидовых пространств или пространств со скалярным произведением. Основным результатом этой лекции является теорема Пифагора и ее следствия, такие как неравенство Бесселя, тождество параллелограмма и т.д. Весь этот материал является стандартным и его можно найти, например в книге [7], гл.II, п.1.

В лекции 2.2 класс рассматриваемых пространств расширяется до нормированных. Основным результатом лекции является теорема о продолжении ограниченного линейного отображения (теорема 2 из п. 2.2.2). Результаты этой лекции также вполне стандартны и их можно найти, например, в книге [7], гл.II, п.1.

Лекция 2.3 — это краткое введение в теорию меры и интеграла Лебега. В ее изложении мы следовали в основном учебнику [4], гл.II. В ней излагаются исходные понятия теории измеримых функций на пространствах с мерой. Определяются функции, интегрируемые по Лебегу, как пределы простых интегрируемых функций и вводится понятие интеграла Лебега для таких функций. Определяется пространство $L^1(M, d\mu)$ интегрируемых по Лебегу функций и формулируются основные теоремы о сходимости интегрируемых функций, такие как теорема Б.Леви о монотонной сходимости, теорема Лебега об ограниченной сходимости, теорема Фату о сходимости неотрицательных функций, теорема Лебега об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Как и в других отступлениях, все эти результаты приводятся без доказательств, исключение сделано только для теоремы о полноте пространства $L^1(M, d\mu)$, доказательство которой демонстрирует силу теорем Б.Леви и Лебега. Следующий параграф, в изложении которого мы следуем [7], гл.I, п.4, посвящен теории борелевских мер на прямой. Главным результатом здесь является теорема Лебега о представлении произвольной борелевской меры в виде суммы атомарной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент. Вся эта теория переносится затем на абстрактные меры, для которых формулируется также общая теорема Фубини.

Лекция 2.4 посвящена гильбертовым пространствам – одному из двух главных классов бесконечномерных линейных пространств, рассматриваемых в курсе. В изложении этой лекции мы следуем книге [7], гл.II, хотя весь материал является традиционным. Здесь доказываются теорема об ортогональной проекции, теорема Рисса о представлении линейных функционалов, теорема о представлении полуторалинейных форм линейными операторами.

Лекция 2.5, посвященная ортонормированным базисам в гильбертовых пространствах, открывается отступлением, в котором излагается лемма Цорна. Эта лемма, как известно, эквивалентна аксиоме выбора. Ее обсуждение можно найти в любом учебнике по теории множеств, например, в книге [3], гл.0, п.25. Дальнейшее изложение основано на [7], гл.II, п.3. Здесь доказываются теорема о существовании ортонормированного базиса в произвольном гильбертовом пространстве, теорема Парсеваля о разложении векторов по ортонормированному базису, приводится полезный критерий сходимости рядов с попарно ортогональными членами, заимствованный нами из книги [9], п. 12.6. Дается конструкция Грама–Шмидта и доказывается критерий сепарабельности гильбертовых пространств.

В изложении лекции 2.6, посвященной тензорным произведениям гильбертовых пространств, мы следуем [7], гл.II, п.4. Этот материал не всегда включается в стандартные курсы функционального анализа. Мы привели его ради того, чтобы ввести понятие фоковского пространства, являющегося ныне одним из центральных понятий в современной квантовой теории поля.

Глава 3

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1 Лекция VIII. Определение и примеры банаховых пространств

3.1.1 Пространства L^p и ℓ^p

Определение 26. Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Пример 11 (пространство $L^\infty(\mathbb{R})$)**.** Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$ состоит из классов эквивалентности (относительно меры Лебега) измеримых функций f на вещественной прямой $\mathbb{R}$, для которых существует константа $C > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leq C$$

почти всюду по мере Лебега. Наименьшая из таких констант C называется нормой f и обозначается $\|f\|_\infty$.

Пространство $L^\infty(\mathbb{R})$ является банаховым с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Оно содержит подпространство $C_b(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ и ограничение нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $C_b(\mathbb{R})$ совпадает с обычной sup-нормой

$$\|f\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

на $C_b(\mathbb{R})$. Очевидно, подпространство $C_b(\mathbb{R})$ замкнуто в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим подпространство $C_{\text{fin}}(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с компактными носителями. Это нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, которое, однако, не является полным. Его пополнение по норме $\|\cdot\|_\infty$ совпадает с пространством $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности.

Пример 12 (пространство $L^p(M, d\mu)$)**.** Пусть $(M, \mathcal{R}, \mu)$ – пространство с мерой. При $p \geq 1$ обозначим через $L^p(M, d\mu)$ множество классов эквивалентности (относительно меры μ) измеримых функций на M, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Это пространство обладает следующими свойствами:

1. если $f, g \in L^p(M, d\mu)$, то

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \text{ (неравенство Минковского);}$$

2. пространство $L^p(M, d\mu)$ полно (ср. с теоремой 4);

3. если p, q, r – положительные числа ≥ 1, связанные соотношением $1/r = 1/p + 1/q$, то произведение fg функций $f \in L^p(M, d\mu)$ и $g \in L^q(M, d\mu)$ принадлежит пространству $L^r(M, d\mu)$ и

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ (неравенство Гельдера).}$$

Из приведенных свойств вытекает, что $L^p(M, d\mu)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_p$.

Пример 13 (пространство ℓ^p)**.** Пусть $x = \{x\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает последовательность комплексных чисел. По аналогии с пространствами L^p можно рассмотреть следующие пространства последовательностей:

$$\ell^\infty = \{x: \ \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty\},$$

$$\ell^p = \{x: \ \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p\right)^{1/p} < \infty\}, \quad p \geq 1.$$

Они также являются банаховыми пространствами. Подпространство

$$c_0 = \{x: \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \subset \ell^\infty$$

замкнуто в ℓ^∞ и потому само является банаховым пространством. Подпространство

$$c_{\text{fin}} = \{x: \ x_n = 0 \text{ для всех } n, \text{ кроме конечного числа}\}$$

плотно в c_0 и в ℓ^p.

3.1.2 Пространство ограниченных линейных операторов

Обозначим через $B(X, Y)$ векторное пространство ограниченных линейных операторов $T: X \to Y$, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Введем в $B(X, Y)$ *операторную норму*, полагая

$$\|T\| = \sup_{v \in X \setminus 0} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X}.$$

Это превращает $B(X, Y)$ в нормированное пространство.

Предложение 7. *Пространство $B(X, Y)$ банахово, если Y банахово.*

Доказательство. Покажем, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность Коши в $B(X,Y)$, то существует ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ такой, что $\|T_n - T\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Указанный оператор строится следующим образом. Для любого $v \in X$ последовательность $\{T_n v\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши в полном пространстве Y. Поэтому последовательность векторов $\{T_n v\}$ сходится при $n \to \infty$ к некоторому вектору $w \in Y$. Положим $Tv := w$.

Определенный таким образом оператор T, очевидно, линеен. Покажем, что он также ограничен. Действительно, так как $\{T_n\}$ является последовательностью Коши в нормированном пространстве $B(X,Y)$, то она ограничена. Следовательно, найдется константа $C > 0$ такая, что при любом n справедлива оценка

$$\sup_{\|v\| \le 1} \frac{\|T_n v\|}{\|v\|} = \|T_n\| \le C,$$

откуда $\|T_n v\| \le C$ при любом n и любом v с нормой $\|v\| \le 1$. Следовательно, $\|Tv\| \le C$ при любом v с нормой $\|v\| \le 1$, т.е. оператор T ограничен.

Для того, чтобы показать, что $\|T - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, заметим, что

$$\|(T - T_n)v\| = \lim_{m \to \infty} \|(T_m - T_n)v\|,$$

поэтому

$$\frac{\|(T - T_n)v\|}{\|v\|} = \lim_{m \to \infty} \frac{\|(T_m - T_n)v\|}{\|v\|} \le \lim_{m \to \infty} \|T_m - T_n\|,$$

т.е. $\|T - T_n\| \le \lim_{m \to \infty} \|T_m - T_n\|$. Так как правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой при достаточно большом n, то $\|T - T_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. □

Определение 27. Ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется *изоморфизмом*, если T является биективным отображением с ограниченным обратным. Если этот оператор к тому же сохраняет норму, то он называется *изометрией*.

Например, мы показали ранее (см. теорему 20 из п. 2.5.5), что любое сепарабельное гильбертово пространство изометрично ℓ^2.

Определение 28. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на нормированном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C_2 \|v\|_1.$$

Например, все следующие нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i|\}_{i=1}^{n}.$$

С другой стороны, пополнение пространства c_{fin} по норме $\|\cdot\|_\infty$ совпадает с c_0, а его пополнение по норме $\|\cdot\|_p$ есть ℓ^p.

3.2 Лекция IX. Сопряженное пространство

3.2.1 Определение и примеры

В предложении 7 из предыдущего параграфа было показано, что пространство $B(X,Y)$ ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y само является банаховым. В случае, когда $Y=\mathbb{C}$, пространство $B(X,\mathbb{C})$ состоит из ограниченных линейных функционалов $f: X \to \mathbb{C}$ и называется *сопряженным пространством* X^* к пространству X. Напомним, что норма ограниченного линейного функционала $f \in X^*$ определяется формулой

$$\|f\| = \sup_{v\in X:\|v\|\le 1} |f(v)|.$$

Пример 14 (пространство L^p)**.** Пусть $1<p<\infty$ и $1/p+1/q=1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $g \in L^q(\mathbb{R})$, то по неравенству Гельдера $fg \in L^1(\mathbb{R})$ и потому определен интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Сопоставим функции $g \in L^q(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{3.1}$$

на пространстве $L^p(\mathbb{R})$. По неравенству Гельдера G является ограниченным линейным функционалом на $L^p(\mathbb{R})$ с нормой, не превосходящей $\|g\|_q$.

Обратное утверждение также верно: любой ограниченный линейный функционал на $L^p(\mathbb{R})$ имеет вид $f \mapsto G(f)$ для некоторой функции $g \in L^q(\mathbb{R})$. Кроме того, разным функциям из $L^q(\mathbb{R})$ отвечают различные функционалы на $L^p(\mathbb{R})$, т.е. отображение

$$L^q(\mathbb{R}) \ni g \longmapsto G \in L^p(\mathbb{R})^*$$

устанавливает (сопряженно-линейную) изометрию пространства $L^q(\mathbb{R})$ на пространство $L^p(\mathbb{R})^*$. Иначе говоря, $L^p(\mathbb{R})^* = L^q(\mathbb{R})$.

В случае $p=2$ имеем $q=2$ и $L^2(\mathbb{R})^* = L^2(\mathbb{R})$, т.е. пространство $L^2(\mathbb{R})$ сопряжено самому себе. Из теоремы Рисса следует, что это свойство выполняется для любых гильбертовых пространств.

Пример 15 (пространства c_0 и ℓ^p)**.** Напомним, что пространство c_0 состоит из последовательностей $x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$ комплексных чисел, стремящихся к нулю. Если последовательность $f=\{f_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит ℓ^1, то ей можно сопоставить линейный функционал

$$F(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n x_n$$

на пространстве c_0 с нормой, равной $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$.

Покажем, что все ограниченные линейные функционалы на c_0 имеют указанный вид. Действительно, пусть $f \in c_0^*$ и e^n – вектор из c_0, у которого на n-ом месте стоит 1, а на остальных местах нули. Положим

$$f_n := f(e^n)$$

и

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}{}' \, \frac{|f_n|}{f_n} \, e^n,$$

где "штрих" у знака суммы означает, что в ней нужно опустить все члены с $f_n = 0$. Иначе говоря,

$$S_N = \left(\frac{|f_1|}{f_1}, \frac{|f_2|}{f_2}, \dots, \frac{|f_N|}{f_N}, 0, \dots \right)$$

(где опущены члены с $f_n = 0$). Тогда $S_N \in c_0$ и $\|S_N\|_{c_0} = 1$. Так как

$$f(S_N) = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

и

$$|f(S_N)| \leq \|S_N\|_{c_0} \, \|f\|_{c_0^*} = \|f\|_{c_0^*},$$

то

$$\|f\|_{c_0^*} \geq \sum_{n=1}^{N} |f_n|.$$

Следовательно, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \|f\|_{c_0^*},$$

откуда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, т.е.

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$$

является корректно определенным ограниченным линейным функционалом на пространстве c_0. Более того, F совпадает с f на конечных линейных комбинациях векторов e^n. Так как такие линейные комбинации плотны в c_0, то $F = f$. Следовательно, любой ограниченный линейный функционал из c_0^* порождается некоторым элементом из ℓ^1. При этом нормы в c_0^* и ℓ^1 совпадают, т.е. $c_0^* = \ell^1$.

Аналогичное рассуждение показывает, что $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

3.2.2 Рефлексивные банаховы пространства

Так как пространство X^*, сопряженное к банахову пространству X, снова является банаховым, то и второе сопряженное пространство $(X^*)^* = X^{**}$ также банахово. В примере 15 из предыдущего параграфа мы показали, что $c_0^* = \ell^1$, а $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, откуда следует, что вторым сопряженным пространством к пространству c_0 является пространство $\ell^\infty \supset c_0$.

Предложение 8. *Пусть X – банахово пространство. Сопоставим вектору $v \in X$ линейный функционал v^* на пространстве X^*, задаваемый формулой*

$$X^* \ni f \longmapsto v^*(f) := f(v).$$

Отображение $v \mapsto v^*$ задает изометрию пространства X на некоторое подпространство в X^{**}.

Доказательство. Так как

$$|v^*(f)| = |f(v)| \leq \|f\|_{X^*} \|v\|_X,$$

то v^* является ограниченным линейным функционалом на X^* с нормой, не превосходящей $\|v\|_X$. Из теоремы Хана–Банаха (которую мы докажем чуть позже) следует, что для заданного $v \in X$ всегда существует функционал $f_0 \in X^*$ такой, что

$$\|f_0\|_{X^*} = 1 \quad \text{и} \quad f_0(v) = \|v\|_X.$$

Поэтому

$$\|v^*\|_{X^{**}} = \sup_{f:\|f\|_{X^*}=1} |v^*(f)| \geq |v^*(f_0)| = \|v\|_X,$$

откуда $\|v^*\|_{X^{**}} = \|v\|_X$. Следовательно, отображение $v \mapsto v^*$ является изометрией X на образ этого отображения в пространстве X^{**}. □

Определение 29. Если отображение $X \to X^{**}$, $v \mapsto v^*$, построенное в предыдущем предложении, сюръективно, т.е. X изометрично X^{**}, то банахово пространство X называется *рефлексивным*.

Например, пространства $L^p(\mathbb{R})$ с $1 < p < \infty$ рефлексивны, а пространство c_0 не рефлексивно, поскольку $c_0^{**} = \ell^\infty \supset c_0$.

3.3 Лекция X. Основные теоремы о банаховых пространствах

3.3.1 Теорема Хана–Банаха

Теорема 21 (теорема Хана–Банаха для вещественного случая)**.** *Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественнозначная функция на X, удовлетворяющая следующему условию выпуклости*

$$p(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda p(u) + (1-\lambda)p(v)$$

для всех $u, v \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Предположим, что на линейном подпространстве $Y \subset X$ задан вещественнозначный линейный функционал f, удовлетворяющий оценке

$$f(v) \leq p(v) \quad \text{для всех } v \in Y. \tag{3.2}$$

Тогда существует вещественнозначный линейный функционал F на всем пространстве X, удовлетворяющий оценке

$$F(u) \leq p(u) \quad \text{для всех } u \in X \tag{3.3}$$

и совпадающий с f на Y.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{Y}$ линейное подпространство, натянутое на Y и произвольный вектор $w \in X \setminus Y$. Продолжим функционал f до линейного функционала $\widetilde{f}$ на пространстве $\widetilde{Y}$, удовлетворяющего оценке (3.2). Функционал f на векторах вида $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, где $v_1, v_2 \in Y$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \\ &= (\lambda_1+\lambda_2) f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} v_2\right) \le (\lambda_1+\lambda_2) p\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} v_2\right) \\ &\qquad = (\lambda_1+\lambda_2) p\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}(v_1 - \lambda_2 w) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(v_2 + \lambda_1 w)\right) \\ &\qquad\qquad \le \lambda_1 p(v_1 - \lambda_2 w) + \lambda_2 p(v_2 + \lambda_1 w). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \le \lambda_1 p(v_1 - \lambda_2 w) + \lambda_2 p(v_2 + \lambda_1 w).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1 \left[f(v_1) - p(v_1 - \lambda_2 w)\right] \le \lambda_2 \left[p(v_2 + \lambda_1 w) - f(v_2)\right]$$

или

$$\frac{1}{\lambda_2}\left[f(v_1) - p(v_1 - \lambda_2 w)\right] \le \frac{1}{\lambda_1}\left[p(v_2 + \lambda_1 w) - f(v_2)\right].$$

Напомним, что последнее неравенство выполняется для любых $v_1, v_2 \in Y$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$. В то же время его левая часть зависит только от v_1, λ_2, а правая часть – только от v_2, λ_1. Если взять теперь отдельно верхнюю грань левой части по переменным $v \equiv v_1$ и $\lambda \equiv \lambda_2$ и нижнюю грань правой части по переменным $v \equiv v_2$ и $\lambda \equiv \lambda_1$, то получим, что существует вещественное число a такое, что

$$\sup_{v\in Y, \lambda>0}\left[\frac{1}{\lambda}\left(f(v) - p(v - \lambda w)\right)\right] \le a \le \inf_{v\in Y, \lambda>0}\left[\frac{1}{\lambda}\left(p(v + \lambda w) - f(v)\right)\right].$$

Положим теперь по определению $\widetilde{f}(w) = a$. Тогда

$$\widetilde{f}(v + \lambda w) = f(v) + \lambda \widetilde{f}(w) \le f(v) + \lambda\left[\frac{1}{\lambda}\left(p(v+\lambda w) - f(v)\right)\right] = p(v + \lambda w),$$

т.е. построенное продолжение $\widetilde{f}$ удовлетворяет оценке

$$\widetilde{f}(u) \le p(u) \quad \text{для всех } u \in \widetilde{Y}.$$

Тем самым, мы построили продолжение функционала f на пространство $\widetilde{Y} \supset Y$.

Для продолжения f на все пространство X воспользуемся леммой Цорна. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех продолжений $\widetilde{f}$ функционала f на пространства $\widetilde{Y} \supset Y$ до линейного функционала на $\widetilde{Y}$, удовлетворяющего оценке $\widetilde{f}(u) \le p(u)$ для всех $u \in \widetilde{Y}$. Введем на $\mathcal{F}$ отношение частичного порядка, полагая $\widetilde{f}_1 \prec \widetilde{f}_2$, если $\widetilde{Y}_2 \supset \widetilde{Y}_1$ и $\widetilde{f}_2 = \widetilde{f}_1$ на $\widetilde{Y}_1$.

Пусть $\{\widetilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – линейно упорядоченное подмножество, составленное из продолжений $\widetilde{f}_\alpha$ функционала f на пространства $\widetilde{Y}_\alpha$. Определим продолжение $\widetilde{f}$ на

пространство $Y = \cup_{\alpha\in A}\widetilde{Y}_\alpha$, полагая $\widetilde{f}(u) = \widetilde{f}_\alpha(u)$ при $u \in \widetilde{Y}_\alpha$. Ясно, что это определение корректно и $\widetilde{f}_\alpha \prec \widetilde{f}$ для любого $\alpha \in A$, т.е. $\widetilde{f}$ является верхней гранью множества $\{\widetilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Тем самым, показано, что всякое линейно упорядоченное множество в $\mathcal{F}$ имеет верхнюю грань.

Поэтому по лемме Цорна множество $\mathcal{F}$ содержит максимальный элемент F, заданный на некотором подпространстве $X' \subset X$, на котором $F(u) \le p(u)$. Но это подпространство X' должно совпадать с X, так как иначе мы могли бы продолжить F на более широкое подпространство в X, добавляя к X' еще один вектор из $X \setminus X'$, что противоречит максимальности F. □

Теорема 22 (теорема Хана–Банаха для комплексного случая)**.** *Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественнозначная функция на X, удовлетворяющая следующему условию выпуклости*

$$p(\lambda u + \mu v) \le \lambda p(u) + \mu p(v)$$

для всех $u, v \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| + |\mu| = 1$. Предположим, что на комплексном линейном подпространстве $Y \subset X$ задан комплекснозначный линейный функционал f, удовлетворяющий оценке

$$|f(v)| \le p(v) \quad \text{для всех } v \in Y. \tag{3.4}$$

Тогда существует комплекснозначный линейный функционал F на всем пространстве X, удовлетворяющий оценке

$$|F(u)| \le p(u) \quad \text{для всех } u \in X \tag{3.5}$$

и совпадающий с f на Y.

Доказательство. Обозначим $f_1(v) := \operatorname{Re} f(v)$. Тогда f_1 есть вещественнозначный линейный функционал на Y такой, что

$$f_1(iv) = \operatorname{Re} f(iv) = \operatorname{Re}\, [if(v)] = -\operatorname{Im} f(v)$$

для $v \in Y$. Отсюда

$$f(v) = f_1(v) - if_1(iv) \quad \text{для всех } v \in Y.$$

Заметим, что

$$f_1(v) = \operatorname{Re} f(v) \le |f(v)| \le p(v)$$

и

$$p(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda p(u) + (1-\lambda)p(v) \quad \text{при } 0 \le \lambda \le 1,$$

т.е. функционал f_1 удовлетворяет условию теоремы Хана–Банаха для вещественного случая. Поэтому f_1 допускает продолжение до вещественнозначного линейного функционала F_1 на всем пространстве X, удовлетворяющего оценке

$$F_1(u) \le p(u) \quad \text{при } u \in X.$$

Положим $F(u) = F_1(u) - iF_1(u)$ при $u \in X$. Тогда F является линейным продолжением функционала f на все пространство X. Более того,

$$F(iu) = F_1(iu) - iF_1(-u) = -i\,[F_1(-u) + iF_1(iu)] = i\,[F_1(u) - iF_1(iu)] = iF(u),$$

т.е. F является комплексно-линейным функционалом.

Осталось проверить, что $|F(u)| \le p(u)$ для всех $u \in X$. Из условия выпуклости на функцию p следует, что $p(\lambda u) \le p(u)$ при $|\lambda| = 1$. Обозначим $\theta := \arg F(u)$ и вспомним, что $\operatorname{Re} F = F_1$. Тогда

$$|F(u)| = e^{-i\theta} F(u) = F(e^{-i\theta} u) = F_1(e^{-i\theta} u),$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что выражение $F(e^{-i\theta} u) = e^{-i\theta} F(u)$ вещественно. Последний член допускает оценку

$$F_1(e^{-i\theta} u) \le p(e^{-i\theta} u) \le p(u).$$

Тем самым, $|F(u)| \le p(u)$ для всех $u \in X$. □

Следствие 4. *Пусть Y есть линейное подпространство в линейном нормированном пространстве X и f – ограниченный линейный функционал на Y. Тогда существует ограниченный линейный функционал $F \in X^*$, являющийся продолжением функционала f и удовлетворяющий условию*

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно взять в качестве функции p из теоремы Хана–Банаха функцию $p(u) = \|f\|_{Y^*} \|u\|$ и применить теорему Хана–Банаха. □

Следствие 5. *Пусть v есть некоторый фиксированный вектор в линейном нормированном пространстве X с $\|v\| \ne 0$. Тогда существует ограниченный линейный функционал $F \in X^*$ с единичной нормой, для которого*

$$F(v) = \|v\|.$$

Доказательство. Обозначим через Y вещественную прямую, натянутую на вектор v, и положим:

$$f(\lambda v) = \lambda \|v\|.$$

Тогда f есть линейный ограниченный функционал на Y с нормой, равной 1. По следствию 4 существует функционал $F \in X^*$ с единичной нормой, который продолжает f на все пространство X. В частности, $F(v) = \|v\|$. □

Следствие 6. *Пусть Y есть замкнутое линейное подпространство в линейном нормированном пространстве X и v – вектор в X, расстояние от которого до Y равно d. Тогда существует ограниченный линейный функционал $F \in X^*$ с нормой $\|F\|_{X^*} \le 1$ такой, что*

$$F(v) = d \quad \text{и} \quad F(v) = 0 \text{ для всех } v \in Y.$$

Доказательство этого следствия оставляем читателю.

3.3.2 Прямые суммы и фактор-пространства

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть семейство банаховых пространств. Рассмотрим пространство

$$X = \{v = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A} :\ v_\alpha \in X_\alpha,\ \sum_{\alpha\in A} \|v_\alpha\|_{X_\alpha} < \infty\}.$$

Это пространство, обозначаемое через $X = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$, является банаховым (проверьте!) относительно нормы

$$\|v\|_X = \sum_{\alpha\in A} \|v_\alpha\|_{X_\alpha}$$

и называется *прямой суммой* банаховых пространств X_α.

Пусть, далее, Y – замкнутое подпространство банахова пространства X. В случае гильбертова пространства X мы построили разложение X в прямую сумму $X = Y \oplus Y^\perp$, где $Y^\perp$ – ортогональное дополнение к Y. В случае банахова пространства X роль ортогонального дополнения $Y^\perp$ будет играть *фактор-пространство* X/Y. Оно определяется следующим образом. Введем на X отношение эквивалентности:

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in Y, \quad \text{где } u, v \in X.$$

Множество классов эквивалентности обозначается через X/Y, а его элементами являются классы $[v]$, состоящие из векторов вида $v+w$, где $w \in Y$. Оно является векторным пространством, в котором сложение элементов и их умножение на скаляры определяется формулой

$$\lambda[u] + \mu[v] = [\lambda u + \mu v].$$

Введем на X/Y норму, полагая

$$\|[v]\|_{X/Y} := \inf_{w\in Y} \|v + w\|_X.$$

Это превращает X/Y в линейное нормированное пространство, которое является полным (проверьте!) и потому банаховым пространством.

3.3.3 Принцип равномерной ограниченности

Предложение 9. *Пусть $T : X \to Y$ – линейный оператор из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y. Оператор T ограничен тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого единичного шара $T^{-1}(\{v \in Y : \|v\|_Y \leq 1\})$ содержит внутренние точки.*

Доказательство. Предположим сначала, что указанный прообраз содержит шар $\{v \in X :\ \|v - u_0\|_X < \epsilon\}$ с центром в некоторой точке u_0. Тогда, если $u \in X$ удовлетворяет неравенству $\|u\| < \epsilon$, то

$$\|Tu\| \leq \|T(u + u_0)\| + \|Tu_0\| < 1 + \|Tu_0\|,$$

где второе (строгое) неравенство выполняется ввиду того, что точка $v = u + u_0$ принадлежит шару $\{v \in X : \ \|v - u_0\|_X < \epsilon\}$. Следовательно, для всех $u \in X$ справедлива оценка

$$\frac{\|Tu\|}{\|u\|} \leq \frac{\|T\left(\frac{\epsilon}{2}\frac{u}{\|u\|}\right)\|}{\epsilon/2} \leq \frac{2}{\epsilon}\left(1 + \|Tu_0\|\right),$$

поскольку норма вектора $\frac{\epsilon}{2}\frac{u}{\|u\|}$ не превосходит $\epsilon/2 < \epsilon$. Отсюда следует, что оператор T ограничен.

Обратно, если T ограничен, то прообраз замкнутого единичного шара содержит шар $\{u \in X : \ \|u\| < 1/\|T\|\}$. □

Принцип равномерной ограниченности, который мы докажем ниже, основан на следующей теореме Бэра о категории.

Определение 30. Подмножество E метрического пространства X называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит внутренних точек.

Теорема 23 (теорема Бэра о категории)**.** *Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных подмножеств.*

Доказательство. Допустим, напротив, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

есть объединение нигде не плотных подмножеств E_n. Мы построим последовательность Коши $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$, предел v которой, существующий ввиду полноты X, не принадлежит $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, что будет противоречить исходному допущению.

Перейдем к построению указанной последовательности. Так как E_1 нигде не плотно в X, то найдется точка $v_1 \notin \overline{E}_1$ такая, что существует открытый шар B_1 с центром в v_1 и радиуса, меньшего 1, такой что

$$B_1 \cap E_1 = \emptyset.$$

Так как E_2 нигде не плотно в X и, следовательно, в B_1, то найдется точка $v_2 \in B_1 \setminus \overline{E}_2$ такая, что существует открытый шар с центром в v_2 и радиуса, меньшего $1/2$, такой что

$$B_2 \cap E_2 = \emptyset.$$

Продолжая это построение по индукции, выберем точку $v_n \in B_{n-1} \setminus \overline{E}_n$ и открытый шар B_n с центром в v_n радиуса, меньшего $1/2^{n-1}$, такой что $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$ и $B_n \cap E_n = \emptyset$.

Построенная последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши, поскольку при $m, n > N$ имеем $v_m, v_n \in B_N$ и

$$\rho(v_m, v_n) \leq \rho(v_m, v_N) + \rho(v_N, v_n) \leq \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^{N-2}},$$

где ρ обозначает метрику на X. Отсюда следует, что $\rho(v_m, v_n)$ может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом N. Так как $v_n \in B_N$ при

$n \geq N$, то предел $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ последовательности $\{v_n\}$ удовлетворяет условию

$$v \in \overline{B}_N \subset B_{N-1} \Longrightarrow v \notin E_{N-1} \text{ при любом } N,$$

откуда следует, что $v \notin \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, что противоречит предположению о том, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. □

Из теоремы Бэра вытекает следующее утверждение: если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то хотя бы одно из множеств $\overline{E}_n$ содержит внутренние точки.

Теперь мы выведем из доказанной теоремы Бэра следующий *принцип равномерной ограниченности*.

Теорема 24 (теорема Банаха–Штейнгауза)**.** *Пусть X – банахово пространство и $\mathcal{T} = \{T\}$ – семейство ограниченных линейных операторов $T : X \to Y$, действующих из пространства X в некоторое линейное нормированное пространство Y. Допустим, что для любого $v \in X$ множество*

$$\{\|Tv\|_Y : \; T \in \mathcal{T}\}$$

ограничено. Тогда множество норм $\{\|T\| : \; T \in \mathcal{T}\}$ также ограничено.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$E_n := \{v \in X : \; \|Tv\| \leq n \text{ для всех } T \in \mathcal{T}\}.$$

По предположению каждое $v \in X$ принадлежит одному из множеств E_n, т.е.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Более того, ввиду непрерывности операторов $T \in \mathcal{T}$ каждое из множеств E_n замкнуто. Поэтому по теореме Бэра о категории хотя бы одно из них содержит внутренние точки. Пусть это будет множество E_n. Повторим для него рассуждение из предложения 9. Так как E_n содержит внутренние точки, то найдется точка v_0, принадлежащая E_n вместе с некоторым шаром $\{v : \; \|v - v_0\| < \epsilon\}$. Тогда для любого u с нормой $\|u\| < \epsilon$ будем иметь

$$\|Tu\| \leq \|T(u + v_0)\| + \|Tv_0\| \leq 2n,$$

так как точки $v = u + v_0$ и v_0 принадлежат E_n. Следовательно, для всех $v \in X$ выполняется оценка

$$\|Tv\| \leq \frac{4n}{\epsilon}\|v\| \quad \text{для любого } T \in \mathcal{T}.$$

Поэтому множество $\{\|T\| : \; T \in \mathcal{T}\}$ ограничено. □

3.3.4 Теоремы об открытом и обратном отображении

Теорема 25 (теорема об открытом отображении)**.** *Пусть $T : X \to Y$ – ограниченное линейное отображение из банахова пространства X на банахово пространство Y. Если U – открытое подмножество в X, то образ $T(U)$ также открыт.*

Доказательство. Пусть V есть окрестность произвольной точки $v \in X$. Покажем, что $T(V)$ является окрестностью точки $T(v)$. Ввиду линейности T, достаточно показать это для точки $v = 0$.

Обозначим через $B_X(r)$ шар радиуса r с центром в точке $0 \in X$, причем выберем r так, чтобы $\overline{B_X(r)} \subset V$. Введем еще одно обозначение

$$B_n := B_X(r/2^n) = \{v \in X : \|v\| < \frac{r}{2^n}\}.$$

Мы покажем, что множество $T(V)$ содержит замыкание $\overline{T(B_1)}$ и в Y найдется окрестность нуля W, содержащаяся в $\overline{T(B_1)}$, откуда и будет следовать доказываемое утверждение.

Докажем сначала второе утверждение: существование окрестности нуля W, содержащейся в $\overline{T(B_1)}$.

Заметим, прежде всего, что множество

$$B_2 - B_2 := \{u - w : u, v \in B_2\}$$

содержится в B_1. Отсюда, в силу линейности T, будет следовать, что $T(B_2) - T(B_2) \subset T(B_1)$ и, следовательно, $\overline{T(B_2)} - \overline{T(B_2)} \subset \overline{T(B_1)}$. Поэтому для доказательства второго утверждения достаточно показать, что множество $\overline{T(B_2)}$ содержит внутренние точки. По условию

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\,T(B_2),$$

где $k\,T(B_2) = \{kTv : \|v\| < \frac{r}{4}\}$ – гомотетия множества $T(B_2)$. По теореме Бэра о категории хотя бы одно из множеств $\overline{k\,T(B_2)}$ содержит внутренние точки. Но это возможно только в том случае, если само множество $\overline{T(B_2)}$ имеет непустую внутренность.

Докажем теперь первое утверждение: множество $T(V)$ содержит замыкание $\overline{T(B_1)}$.

Пусть v_1 – произвольная точка из $\overline{T(B_1)}$. Выберем точку v_2 из $\overline{T(B_2)}$ следующим образом. Повторяя доказательство второго утверждения с заменой B_1 на B_2 и B_2 на B_3, можно показать, что $\overline{T(B_2)}$ содержит окрестность нуля, поэтому

$$\left(v_1 - \overline{T(B_2)}\right) \cap T(B_1) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется точка $u_1 \in B_1$ такая, что

$$Tu_1 \in v_1 - \overline{T(B_2)}.$$

Теперь положим $v_2 := v_1 - Tu_1$, так что $v_2 \in \overline{T(B_2)}$.

Продолжая указанное построение по индукции, построим по точке $v_n \in \overline{T(B_n)}$ точку $v_{n+1} \in \overline{T(B_{n+1})}$ следующим образом. Сначала, повторяя доказательство второго утверждения с заменой B_1 на B_{n+1} и B_2 на B_{n+2}, покажем, что $\overline{T(B_{n+1})}$ содержит окрестность нуля. Отсюда следует, что

$$\left(v_n - \overline{T(B_{n+1})}\right) \cap T(B_n) \neq \emptyset,$$

поэтому найдется точка $u_n \in B_n$ такая, что

$$Tu_n \in v_n - \overline{T(B_{n+1})}.$$

Полагая $v_{n+1} := v_n - Tu_n$, получим $v_{n+1} \in \overline{T(B_{n+1})}$, что позволяет продолжить процесс построения последовательности $\{v_n\}$.

Частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} u_n$ образуют последовательность Коши, поскольку $u_n \in B_n$, т.е. $\|u_n\| < \frac{r}{2^n}$. Поэтому, в силу полноты X, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится к некоторому вектору $u \in \overline{B_X(r)} \subset V$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{N} Tu_n = \sum_{n=1}^{N} (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1}. \tag{3.6}$$

Так как $v_{N+1} \in \overline{T(B_{N+1})}$, то, в силу непрерывности T, $v_{N+1} \to 0$ при $N \to \infty$, поэтому из (3.6) вытекает, что $v_1 = Tu \in T(V)$. Следовательно, $\overline{T(B_1)} \subset T(V)$, что доказывает сформулированное выше первое утверждение, а вместе с ним и утверждение теоремы. □

Теорема 26 (теорема об обратном отображении)**.** *Биективное непрерывное линейное отображение $T : X \to Y$ из банахова пространства X на банахово пространство Y имеет непрерывное обратное.*

Доказательство. Отображение T^{-1} непрерывно, поскольку T открыто. □

3.3.5 Теорема о замкнутом графике

Определение 31. Пусть $T : X \to Y$ – отображение из множества X в множество Y. Его *графиком* называется множество

$$\Gamma(T) = \{(u, v) \in X \times Y : \ v = Tu\}.$$

Теорема 27 (теорема о замкнутом графике)**.** *Пусть $T : X \to Y$ – линейное отображение из банахова пространства X в банахово пространство Y. Отображение T ограничено тогда и только тогда, когда его график $\Gamma(T)$ замкнут.*

Доказательство. Предположим сначала, что график $\Gamma(T)$ замкнут. Тогда в силу линейности T график $\Gamma(T)$ есть замкнутое линейное подпространство в прямой сумме $X \oplus Y$ и потому является банаховым пространством с нормой

$$\|(u, Tu)\| := \|u\| + \|Tu\|.$$

Обозначим через π_1, π_2 естественные проекции

$$\pi_1 : \Gamma(T) \longrightarrow X,\ (u, Tu) \longmapsto u,$$
$$\pi_2 : \Gamma(T) \longrightarrow Y,\ (u, Tu) \longmapsto Tu.$$

Проекция π_1 является биекцией, поэтому по теореме об обратном отображении π_1^{-1} непрерывно. Но

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1},$$

откуда следует, что отображение T непрерывно и, следовательно, ограничено.

Обратно, если T ограничено, то оно и непрерывно, а потому график $\Gamma(T)$ замкнут. □

Следствие 7 (теорема Хеллингера–Теплица)**.** *Пусть A – определенный всюду на гильбертовом пространстве H симметрический оператор, т.е.*

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{для любых } u, v \in H.$$

Тогда он ограничен.

Доказательство. Покажем, что график $\Gamma(A)$ замкнут. Допустим, что последовательность $\{(u_n, Au_n)\}$ сходится к элементу $(u, v) \in H \times H$ и покажем, что $(u, v) \in \Gamma(A)$, т.е. $v = Au$. Для любого $w \in H$ имеем

$$(w, v) = \lim_{n\to\infty}(w, Au_n) = \lim_{n\to\infty}(Aw, u_n) = (Aw, u) = (w, Au),$$

откуда $v = Au$. □

3.3.6 Слабые топологии на банаховых пространствах

Отступление: частичная упорядоченность топологий.

Пусть X есть топологическое пространство. Тогда семейство всех его топологий (т.е. семейств $\mathcal{T}$ множеств, открытых в рассматриваемой топологии) частично упорядочено. А именно, топология $\mathcal{T}_1$ *слабее* топологии $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (в смысле теории множеств). Иначе говоря, набор открытых множеств в $\mathcal{T}_1$ беднее, чем в $\mathcal{T}_2$. Напротив, набор сходящихся последовательностей в топологии $\mathcal{T}_1$ богаче, чем в $\mathcal{T}_2$. Топология на X, минимальная в смысле указанного упорядочения, называется *слабейшей*.

Определение 32. Пусть X – банахово пространство и X^* – банахово пространство, сопряженное к X. *Слабой топологией* на X называется слабейшая топология на X, в которой непрерывны все линейные функционалы из X^*.

База окрестностей нуля в этой топологии задается множествами вида

$$U(f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \{v \in X :\ |f_j(v)| < \epsilon \text{ при } j = 1, \ldots, n\}.$$

Последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ *слабо сходится* к v: $v = \text{w-lim}_{n\to\infty} v_n$, тогда и только тогда, когда $f(v_n) \to f(v)$ для любого функционала $f \in X^*$.

Слабая топология на X слабее топологии, задаваемой нормой (почему?).

Пример 16. Пусть H – гильбертово пространство и $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ортонормированный базис в H. Тогда последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $u_n \in H$, слабо сходится к $u \in H$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $(u_n, e_\alpha) \to (u, e_\alpha)$ для любого $\alpha \in A$.

2. Множество $\{\|u_n\|\}_{n=1}^\infty$ ограничено.

Действительно, если $u = \text{w-lim}_{n\to\infty} u_n$, то утверждение (2) вытекает из принципа равномерной ограниченности (почему?), а утверждение (1) выполняется по определению слабой сходимости.

Если же выполняются условия (1),(2), то обозначим через E подпространство в H, совпадающее с линейной оболочкой векторов $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Тогда в силу условия (1)

$$(u_n, v) \longrightarrow (u, v) \text{ для любого } v \in E.$$

Покажем, что последнее условие выполняется для любого $v \in H$. Пользуясь плотностью E в H, найдем последовательность $\{v_m\}_{m=1}^\infty$, $v_m \in E$, сходящуюся к v. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(u_n, v) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(u_n, v_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(u_n, v_m) = \lim_{m\to\infty}(u, v_m) = (u, v),$$

где мы переставили пределы во втором равенстве, пользуясь равномерностью предела $\lim_{m\to\infty}(u_n, v_m) = (u_n, v)$. Указанная равномерность вытекает из оценки

$$|(u_n, v_m) - (u_n, v)| \le \|u_n\| \cdot \|v_m - v\|$$

и условия (2).

Определение 33. Пусть X^* – банахово пространство, сопряженное к банахову пространству X. Тогда *$*$-слабая топология* есть слабейшая топология на X^*, в которой непрерывны все функции вида $f \mapsto f(v)$ с произвольным фиксированным $v \in X$.

Теорема 28 (теорема Банаха–Алаоглу)**.** *Пусть X^* – банахово пространство, сопряженное к банахову пространству X. Тогда единичный шар в пространстве X^* компактен в $*$-слабой топологии.*

Прежде, чем переходить к доказательству этой теоремы, напомним формулировку теоремы Тихонова о произведении компактов.

Отступление: теорема Тихонова.

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть семейство топологических пространств и $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ – их декартово произведение. Обозначим через $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ естественную проекцию на α-й сомножитель для $\alpha \in A$. *Тихоновской топологией* на X называется слабейшая топология на X, в которой непрерывны все проекции π_α, $\alpha \in A$.

Теорема 29 (теорема Тихонова о произведении)**.** *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть семейство компактных топологических пространств. Тогда их произведение $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ компактно в тихоновской топологии.*

Вернемся к *доказательству теоремы Банаха–Алаоглу*. Обозначим через

$$B_v = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \le \|v\|\}, \ v \in X,$$

замкнутый круг на комплексной плоскости, являющийся компактом в $\mathbb{C}$. По теореме Тихонова произведение таких кругов

$$B = \prod_{v \in X} B_v$$

компактно в тихоновской топологии. Элементами B являются наборы комплексных чисел $b(v) \in B_v$, $v \in X$, иначе говоря, функции $b : X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию: $|b(v)| \le \|v\|$.

С другой стороны, единичный шар $B_{X^*}(1)$ в сопряженном пространстве X^* состоит из ограниченных линейных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$ с нормой≤ 1. Иными словами, $B_{X^*}(1)$ есть подмножество B, состоящее из линейных функций b. Топология в $B_{X^*}(1)$, индуцированная из B, является слабейшей топологией, в которой непрерывны все функции вида $b \mapsto b(v)$, т.е. совпадает со $*$-слабой топологией.

Если мы покажем, что шар $B_{X^*}(1)$ замкнут в B, то отсюда по теореме Тихонова будет следовать, что $B_{X^*}(1)$ есть компакт. Допустим, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность в $B_{X^*}(1)$, которая $*$-слабо сходится к функционалу $f \in X^*$. Так как $|f(v)| \le \|v\|$, то достаточно проверить линейность f, которая вытекает из следующей цепочки равенств:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda u + \mu v) = \lim_{n\to\infty} [\lambda f_n(u) + \mu f_n(v)] = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Краткое содержание и библиографические указания к главе 3

В лекции 3.1 дается определение банаховых пространств — второму из двух главных классов бесконечномерных линейных пространств, рассматриваемых в курсе. Принципиальное значение для дальнейшего имеет теорема о банаховости пространства ограниченных линейных операторов, действующих из одного банахова пространства в другое. В изложении этой лекции мы следуем [7], гл. III, п.1, хотя материал, представленный в этой лекции, является вполне традиционным.

В лекции 3.2 изучаются пространства, сопряженные к банаховым и, в частности, рефлексивные банаховы пространства. Материал лекции основан на [7], гл. III, п.2.

Следующая лекция 3.3 содержит основные результаты главы 3. Сначала в п. 3.3.1 доказывается теорема Хана–Банаха в вещественной и комплексной форме. Затем в п. 3.3.3 приводится теорема Банаха–Штейнгауза, доказательство которой основано на использовании теоремы Бэра о категориях. В изложении материала этих параграфов мы следуем [7], гл. III, п.3,4,5. В п. 3.3.4 даны теоремы об открытом и обратном отображении. Доказательство первой из них следует [9], п.2.11, вторая теорема является следствием первой. Теорема о замкнутом графике, приведенная в п. 3.3.5, приобретает принципиальное значение при изучении неограниченных операторов. Ее следствием является теорема Хеллингера–Теплица об ограниченности симметрических операторов. В изложении этого параграфа мы следуем [7], гл. III, п.5. Заключительный параграф 3.3.6 лекции 3.3 посвящен слабым топологиям на банаховых пространствах. Общие сведения о топологиях можно найти в книге [3], гл.1. Применительно к слабым топологиям на банаховых пространствах эти сведения излагаются в [7], гл. IV, п.5. Центральным результатом параграфа является теорема Банаха–Алаоглу о компактности единичного шара в $*$-слабой топологии, основанная на теореме Тихонова о компактности произведения компактов в тихоновской топологии. Доказательство последней теоремы можно найти, например, в книге [3], гл.5, п.13.

Глава 4

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1 Лекция XI. Топологии на пространствах ограниченных операторов

4.1.1 Определения и примеры

Пространство $B(X,Y)$ ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y само является банаховым относительно *операторной* или *равномерной нормы*

$$\|T\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}.$$

Однако на пространстве $B(X,Y)$, помимо топологии,определяемой этой нормой, можно ввести и другие важные топологии.

Сильная операторная топология — это слабейшая топология на $B(X,Y)$, в которой непрерывны все отображения эвалюоации ("значение в точке"), задаваемые формулой

$$\mathrm{ev}_u : B(X,Y) \longrightarrow Y,\ \mathrm{ev}_u(T) = Tu,\ u \in X.$$

База окрестностей нуля в этой топологии задается множествами вида

$$U(u_1,\dots,u_n;\epsilon) = \{T \in B(X,Y) :\ \|Tu_i\| < \epsilon \text{ при } i = 1,\dots,n\},$$

где $u_1,\dots,u_n$ – произвольный конечный набор элементов из X, $\epsilon > 0$.

Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору T в этой топологии, если

$$\|T_n u - Tu\| \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty$$

для всех $u \in X$. Соответствующий предел обозначается через $T = \text{s-lim}_{n\to\infty} T_n$.

Слабая операторная топология — это слабейшая топология на $B(X,Y)$, в которой непрерывны все отображения вида

$$\mathrm{ev}_{u,f} : B(X,Y) \longrightarrow \mathbb{C},\ \mathrm{ev}_{u,f}(T) = f(Tu),$$

где $u \in X,\ f \in Y^*$.

База окрестностей нуля в этой топологии задается множествами вида

$$U(u_1,\dots,u_n;f_1,\dots,f_m;\epsilon)=\\ \{T\in B(X,Y):\ |f_i(Tu_j)|<\epsilon \text{ при } i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\},$$

где $u_1,\dots,u_n$ – произвольный конечный набор элементов из X, $f_1,\dots,f_m$ – произвольный конечный набор функционалов из Y^*, $\epsilon>0$.

Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к оператору T в этой топологии, если

$$|f(T_nu)-f(Tu)|\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty$$

для всех $u\in X$, $f\in Y^*$. Соответствующий предел обозначается через $T=\text{w-lim}_{n\to\infty}T_n$.

В случае гильбертова пространства H слабая сходимость в $B(H)=B(H,H)$ означает сходимость матричных элементов: $(T_nu,v)\to(Tu,v)$.

Пример 17 (операторные топологии в ℓ^2)**.** 1. Определим операторы T_n, действующие в ℓ^2 по формуле:

$$T_n(u_1,u_2,\dots)=\left(\frac{u_1}{n},\frac{u_2}{n},\dots\right).$$

Тогда $T_n\to0$ равномерно.

2. Определим операторы T_n по формуле:

$$T_n(u_1,u_2,\dots)=(\underbrace{0,\dots,0}_{n},u_{n+1},u_{n+2},\dots).$$

Тогда $T_n\to0$ сильно, но не равномерно.

3. Определим операторы T_n равенством:

$$T_n(u_1,u_2,\dots)=(\underbrace{0,\dots,0}_{n},u_1,u_2,\dots).$$

Тогда $T_n\to0$ в слабой, но не в сильной, ни в равномерной топологии.

4.1.2 Слабая сходимость операторов в гильбертовом пространстве

Теорема 30. *Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность ограниченных линейных операторов из $B(H)$. Предположим, что последовательность $\{(u,T_nv)\}_{n=1}^\infty$ сходится, когда $n\to\infty$, при любых $u,v\in H$. Тогда существует ограниченный линейный оператор $T\in B(H)$ такой, что $T=\text{w-lim}_{n\to\infty}T_n$.*

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность норм $\{\|T_nv\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена на любом векторе $v\in H$. Действительно, так как последовательность $\{(u,T_nv)\}$ сходится при любых $u,v\in H$, то последовательность модулей $\{|(u,T_nv)|\}$ ограничена при фиксированных $u,v\in H$. Рассмотрим отображения $T_nv:H\to\mathbb{C}$, задаваемые формулой $(T_nv)(u):=(u,T_nv)$, как операторы из $B(H,\mathbb{C})$. Поскольку при каждом $v\in H$ последовательность $\{|(T_nv)(u)|=$

$|(u, T_n v)|\}$ ограничена, по теореме Банаха–Штейнгауза последовательность норм $\{\|T_n v\|\}$ также ограничена.

Из ограниченности последовательности норм $\{\|T_n v\|\}$ при каждом $v \in H$ по той же теореме Банаха–Штейнгауза вытекает ограниченность последовательности операторных норм $\{\|T_n\|\}$ в $B(H)$.

Положим по определению

$$B(u, v) := \lim_{n\to\infty} (u, T_n v).$$

Введенная таким образом форма $B(u, v)$ полуторалинейна и ограничена, поскольку

$$|B(u, v)| = \lim_{n\to\infty} |(u, T_n v)| \leq \sup_n \|T_n\| \left(\|u\| \cdot \|v\|\right).$$

Поэтому (см. предложение 4 из п. 2.4.3) эта форма представляется ограниченным линейным оператором. Иными словами, существует оператор $T \in B(H)$ такой, что

$$B(u, v) = (u, Tv)$$

для любых $u, v \in H$. Очевидно, что $T = \text{w-lim}_{n\to\infty} T_n$. □

4.2 Лекция XII. Сопряженные операторы

4.2.1 Определения и примеры

Определение 34. Пусть $T : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. *Банаховым сопряженным оператором* к оператору T называется ограниченный линейный оператор $T' : Y^* \to X^*$, задаваемый равенством:

$$(T'f)(u) = f(Tu) \quad \text{для всех } u \in X, f \in Y^*.$$

Пример 18. Пусть $X = Y = \ell^1$ и оператор $T : X \to Y$ задается формулой

$$T(u_1, u_2, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots),$$

иначе говоря, T есть *оператор правого сдвига*. Тогда сопряженный оператор $T' : \ell^\infty \to \ell^\infty$ действует по формуле

$$T'(u_1, u_2, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots).$$

При этом $\|T\| = \|T'\| = 1$.

Предложение 10. *Отображение $T \to T'$ является изометрией пространства $B(X, Y)$ в пространство $B(Y^*, X^*)$.*

Доказательство. Указанное отображение, очевидно, линейно. Кроме того,

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Tu\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \left(\sup_{\|f\|\leq 1} |f(Tu)| \right),$$

где второе равенство вытекает из теоремы Хана–Банаха (см. следствие 5). Выражение в правой части последнего равенства равно

$$\sup_{\|f\|\le 1}\left(\sup_{\|u\|\le 1}|(T'f)(u)|\right)=\sup_{\|f\|\le 1}\|T'f\|=\|T'\|_{B(Y^*,X^*)}.$$

Следовательно, оператор $T' : Y^* \to X^*$ ограничен и отображение $T \to T'$ изометрично. □

4.2.2 Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве

В случае гильбертова пространства H оператор T', сопряженный к ограниченному линейному оператору $T : H \to H$, является оператором из H^* в H^*. Обозначим через C оператор

$$C : H \to H^*,\ H \ni v \longmapsto (v,\cdot) \in H^*,$$

сопоставляющий вектору v ограниченный линейный функционал $(v,\cdot)$ на H. Отображение C является сопряженно-линейной изометрией $H \to H^*$ (сюръективность C вытекает из теоремы Рисса). Определим *гильбертов сопряженный оператор* $T^* : H \to H$ по формуле

$$T^* := C^{-1}T'C.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(v,Tu) &= (Cv)(Tu)\ \text{(значение функционала } Cv \text{ на векторе } Tu) =\\ &= (T'Cv)(u)\ \text{(определение банахового сопряженного оператора)} =\\ &= (C^{-1}(T'Cv),u)\ \text{(определение оператора } C^{-1}) = (T^*v,u),\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(v,Tu) = (T^*v,u) \quad \text{для любых } u,v \in H.$$

Предложение 11. *Сопряженный оператор T^* обладает следующими свойствами:*

1. *отображение $T \mapsto T^*$ есть сопряженно-линейная изометрия пространства $B(H)$ на себя;*
2. $(ST)^* = T^*S^*$;
3. $(T^*)^* = T$;
4. *если оператор $T \in B(H)$ имеет ограниченный обратный T^{-1}, то оператор T^* также обладает ограниченным обратным и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;*
5. *отображение $T \mapsto T^*$ непрерывно в слабой и равномерной топологиях; оно непрерывно в сильной топологии тогда и только тогда, когда пространство H конечномерно;*

6. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из предложения 10 из п. 4.2.1 и того, что отображение C является сопряженно-линейной изометрией.

Свойства (2) и (3) проверяются непосредственно.

Доказательство свойства (4). Из равенства $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ вытекает соотношение $(T^{-1})^*T^* = I = T^*(T^{-1})^*$, откуда следует, что $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Доказательство свойства (5). Непрерывность отображения $T \mapsto T^*$ в слабой топологии очевидна, а его непрерывность в равномерной топологии вытекает из предложения 10 из п. 4.2.1. Что касается отсутствия непрерывности этого отображения в сильной топологии для бесконечномерных гильбертовых пространств H, то достаточно рассмотреть в $H \cong \ell^2$ оператор T_n правого сдвига на n шагов (см. пример 17 из п. 4.1.1), задаваемый формулой:

$$T_n(u_1, u_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, u_1, u_2, \ldots).$$

Тогда $T_n \to 0$ в слабой, но не в сильной топологии. Однако оператор $S_n = T_n^*$, равный

$$S_n(u_1, u_2, \ldots) = (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$$

сходится к нулю сильно. В частности, из сходимости $S_n \to 0$ в сильной топологии не следует сильная сходимость операторов $S_n^* = T_n$.

Доказательство свойства (5). Неравенство $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$ очевидно. В обратную сторону:

$$\|Tu\|^2 = (Tu, Tu) = (T^*Tu, u) \leq \|T^*T\| \cdot \|u\|^2 \leq \|T^*T\|$$

при $\|u\|^2 \leq 1$. □

4.2.3 Ядро и образ линейного оператора

Определение 35. Пусть $T : X \to Y$ – линейный оператор из векторного пространства X в векторное пространство Y. *Ядром* оператора T называется множество

$$\operatorname{Ker} T = \{u \in X : Tu = 0\},$$

а его образом или областью значений – множество

$$\operatorname{Im} T = \{v \in Y : v = Tu \text{ для некоторого } u \in X\}.$$

Ясно, что ядро и образ линейного оператора являются линейными подпространствами. Для банаховых пространств X, Y ядро всегда замкнуто, однако по отношению к образу это верно не всегда (примеры будут приведены ниже).

Определение 36. Пусть X – банахово пространство, E – замкнутое линейное подпространство в X, F – замкнутое линейное подпространство в X^*. *Аннуляторами* подпространств E и F называются множества вида

$$E^\circ = \{f \in X^* : \ f(v) = 0 \text{ для любого } v \in E\},$$
$$F^\circ = \{v \in X : \ f(v) = 0 \text{ для любого } f \in F\}.$$

Очевидно, что введенные аннуляторы являются линейными подпространствами, причем подпространство E° слабо *-замкнуто в X^*, а подпространство F° сильно замкнуто в X (проверьте!)

Предложение 12. *Пусть $T : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. Тогда*

$$\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Im} T)^\circ \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T')^\circ.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из следующей цепочки эквивалентностей

$$f \in \operatorname{Ker} T' \iff T'f = 0 \iff (T'f)(v) = 0 \text{ для любого } v \in X \iff \\ f(Tv) = 0 \text{ для любого } v \in X \iff f \in (\operatorname{Im} T)^\circ.$$

Аналогично,

$$v \in \operatorname{Ker} T \iff Tv = 0 \iff f(Tv) = 0 \text{ для любого } f \in X^* \iff \\ (T'f)(v) = 0 \text{ для любого } f \in X^* \iff v \in (\operatorname{Im} T')^\circ.$$

□

Следствие 8. *Ядро и образ сопряженного оператора обладают следующими свойствами:*

1. *ядро $\operatorname{Ker} T'$ слабо *-замкнуто в Y^*;*
2. *образ $\operatorname{Im} T$ всюду плотен в Y тогда и только тогда, когда оператор T' инъективен;*
3. *оператор T инъективен тогда и только тогда, когда образ $\operatorname{Im} T'$ слабо *-плотен в X^*.*

В случае гильбертова пространства последнее предложение переформулируется следующим образом.

Предложение 13. *Пусть T – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда*

$$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp \quad \text{и} \quad (\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}.$$

Иными словами,

$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{\operatorname{Im} T} = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T^*}.$$

Доказательство оставляем читателю.

Введем два важных класса линейных операторов в гильбертовом пространстве, которые будут постоянно встречаться нам в оставшейся части курса.

Определение 37. Ограниченный линейный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Определение 38. Ограниченный линейный оператор $P : H \to H$ называется *проектором*, если $P^2 = P$. Если, кроме того, указанный оператор является самосопряженным, т.е. $P^* = P$, то такой проектор называется *ортогональным*.

Область значений $\operatorname{Im} P$ проектора P всегда является замкнутым подпространством, на котором P действует как тождественный оператор. Если проектор P ортогонален, то он равен нулю на $(\operatorname{Im} P)^{\perp}$. Иными словами, если вектор u представлен в виде $u = v + w$ в соответствии с ортогональным разложением

$$H = (\operatorname{Im} P) \oplus (\operatorname{Im} P)^{\perp},$$

то $Pu = v$. Тем самым, можно установить взаимно-однозначное соответствие между ортогональными проекторами и замкнутыми линейными подпространствами в H, задаваемое отображением $P \mapsto \operatorname{Im} P$.

4.3 Лекция XIII. Спектр линейного оператора

4.3.1 Определение и начальная классификация

Определение 39. Пусть $T : X \to X$ – ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Говорят, что комплексное число λ принадлежит *резольвентному множеству* $\rho(T)$ оператора T, если $\lambda I - T$ является биективным оператором с ограниченным обратным. *Резольвентой* оператора T в точке $\lambda \in \rho(T)$ называется оператор

$$R_{\lambda}(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Если $\lambda \notin \rho(T)$, то говорят, что λ принадлежит *спектру* $\sigma(T)$ оператора T.

Начальная классификация спектра:

1. Вектор $v \in X \setminus \{0\}$, удовлетворяющий равенству $Tv = \lambda v$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *собственным вектором* оператора T, а отвечающее ему число λ – *собственным значением* оператора T. При таком значении λ оператор $\lambda I - T$, очевидно, не инъективен, поэтому $\lambda \in \sigma(T)$. Множество собственных значений оператора T называется его *точечным спектром*.

2. Если λ не является собственным значением оператора T и область значений $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ не плотна в X, то говорят, что λ лежит в *остаточном спектре* оператора T.

4.3.2 Резольвента и аналитические функции со значениями в банаховом пространстве

Определение 40. Функция $u = u(z) : D \to X$, заданная в области D на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и принимающая значения в банаховом пространстве X, называется *сильно аналитической* в точке $z_0 \in D$, если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(z_0 + h) - u(z_0)}{h}.$$

Функция, сильно аналитическая в каждой точке $z_0 \in D$, называется *сильно аналитической в области* D. С другой стороны, функция $u = u(z)$ называется *слабо аналитической* в области D, если $f(u(z))$ является комплексно аналитической функцией от $z \in D$ для любого функционала $f \in X^*$.

Мы покажем ниже, что оба понятия аналитичности эквивалентны друг другу. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ векторов из банахова пространства X является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда $\{f(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши равномерно по $f \in X^*$ с $\|f\| \leq 1$.*

Доказательство. Если $\{u_n\}$ есть последовательность Коши, то для любого $f \in X^*$ с $\|f\| \leq 1$ справедлива оценка

$$|f(u_n) - f(u_m)| \leq \|u_n - u_m\|,$$

из которой следует, что $\{f(u_n)\}$ является последовательностью Коши равномерно по $f \in X^*$ с $\|f\| \leq 1$.

Обратно, по следствию 5 из теоремы Хана–Банаха

$$\|u_n - u_m\| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |f(u_n) - f(u_m)|.$$

Если $\{f(u_n)\}$ является последовательностью Коши равномерно по $f \in X^*$ с $\|f\| \leq 1$, то из последней оценки немедленно следует, что $\{u_n\}$ есть последовательность Коши. □

Теорема 31. *Каждая слабо аналитическая в области D функция сильно аналитична в этой области.*

Доказательство. Пусть функция $u = u(z)$ слабо аналитична в области D и $z_0 \in D$. Обозначим через Γ окружность с центром в z_0, ограничивающую круг, лежащий в D вместе со своим замыканием. Тогда для любого $f \in X^*$ функция $f(u(z))$ аналитична в D, поэтому по формуле Коши имеет место представление

$$f\left[\frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h}\right] - \frac{d}{dz} f(u(z))\bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] f(u(z))dz$$

при условии, что $z_0 + h$ лежит внутри Γ. Заметим, что в силу непрерывности функции $f(u(z))$ на Γ справедлива оценка

$$|f(u(z))| \leq C_f \quad \text{при } z \in \Gamma$$

с некоторой константой $C_f > 0$.

Рассмотрим совокупность функций $\{f(u(z))\}$ как семейство линейных отображений $u(z) : X^* \to \mathbb{C}$, $u(z) : f \mapsto f(u(z))$, зависящих от параметра $z \in \Gamma$. Так как эти отображения ограничены при каждом $f \in X^*$, то по теореме Банаха–Штейнгауза

$$\sup_{z \in \Gamma} \|u(z)\| \leq C$$

для некоторой константы $C > 0$. Поэтому

$$\left| f\left[\frac{u(z_0+h)-u(z_0)}{h}\right] - \frac{d}{dz}f(u(z))\Big|_{z=z_0}\right| \leq$$
$$\leq \frac{C}{2\pi}\|f\| \int_\Gamma \left|\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right| |dz|. \quad (4.1)$$

Подынтегральное выражение в правой части равно

$$\left|\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right| =$$
$$= \left|\frac{h}{(z-(z_0+h))(z-z_0)^2}\right| = \frac{1}{|z-z_0|^2}\cdot\frac{h}{|z-(z_0+h)|}.$$

Оно равномерно ограничено по h при фиксированном z_0 и произвольном $z \in \Gamma$ и стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому из оценки (4.1) вытекает, что для любой последовательности $h_n \to 0$ последовательность

$$\left\{ f\left[\frac{u(z_0+h_n-n)-u(z_0)}{h_n}\right]\right\}$$

является последовательностью Коши равномерно по $f \in X^*$ с $\|f\| \leq 1$. По лемме 3 последовательность

$$\left\{\frac{u(z_0+h_n-n)-u(z_0)}{h_n}\right\}$$

также является последовательностью Коши для любой последовательности $h_n \to 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(z_0+h)-u(z_0)}{h},$$

т.е. функция $u(z)$ сильно аналитична в точке $z_0 \in D$, а в силу произвольности z_0, и всюду в области D. □

Ввиду доказанной теоремы нам нет необходимости различать далее сильно и слабо аналитические функции со значениями в банаховом пространстве, поэтому в дальнейшем мы называем такие функции просто аналитическими.

Теорема 32 (теорема о резольвенте)**.** *Пусть $T : X \to X$ – ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Тогда его резольвентное множество $\rho(T)$ открыто в $\mathbb{C}$ и $R_\lambda(T)$ является аналитической функцией на $\rho(T)$ со значениями в банаховом пространстве $B(X)$.*

Далее, для любых $\lambda, \mu \in \rho(T)$ операторы $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют друг с другом и выполняется следующее тождество Гильберта:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu-\lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T). \quad (4.2)$$

Доказательство. Идея доказательства подсказывается следующим формальным вычислением. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - T)} = \frac{1}{\lambda_0 - T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}} = \frac{1}{\lambda_0 - T}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)^n\right].$$

Исходя из этого вычисления, естественно ввести функцию

$$\widetilde{R_\lambda(T)} := R_{\lambda_0}(T)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}(T)^n\right].$$

Ряд в квадратных скобках сходится в равномерной топологии при условии, что $|\lambda_0 - \lambda| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$. Для таких λ функция $\widetilde{R_\lambda(T)}$ корректно определена и удовлетворяет соотношению

$$(\lambda I - T)\widetilde{R_\lambda(T)} = I = \widetilde{R_\lambda(T)}(\lambda I - T). \tag{4.3}$$

Действительно, проверим, например, левое равенство. Представим $\lambda I - T$ в виде суммы $(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T)$. Тогда

$$(\lambda - \lambda_0)\widetilde{R_\lambda(T)} = (\lambda_0 I - T)^{-1}\left[(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1} + \right. \\ \left. + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \lambda)^2(\lambda_0 I - T)^{-2} + \ldots\right.$$

и

$$(\lambda_0 I - T)\widetilde{R_\lambda(T)} = (\lambda_0 I - T)^{-1}\left[(\lambda_0 I - T) + (\lambda_0 - \lambda)I + (\lambda_0 - \lambda)^2(\lambda_0 I - T)^{-1} + \right. \\ \left. + (\lambda_0 - \lambda)^3(\lambda_0 I - T)^{-2} + \ldots .\right.$$

Сумма этих выражений дает

$$(\lambda - \lambda_0)\widetilde{R_\lambda(T)} + (\lambda_0 I - T)\widetilde{R_\lambda(T)} = (\lambda_0 I - T)^{-1}[(\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 - \lambda)I + \\ (\lambda_0 - \lambda)I - (\lambda_0 - \lambda)^2(\lambda_0 I - T)^{-1} + (\lambda_0 - \lambda)^2(\lambda_0 I - T)^{-1} + \ldots = \\ = (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 I - T) = I.$$

Из соотношения (4.3) вытекает, что $\widetilde{R_\lambda(T)} = R_\lambda(T)$ и $\lambda \in \rho(T)$ при $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$. Ввиду произвольности λ_0 отсюда следует, что множество $\rho(T)$ открыто, а функция $R_\lambda(T)$, задаваемая абсолютно сходящимся степенным рядом, аналитична на множестве $\rho(T)$.

Для доказательства тождества Гильберта преобразуем разность $R_\lambda(T) - R_\mu(T)$, пользуясь тождествами $R_\lambda(T)(\lambda I - T) = I = (\mu I - T)R_\mu(T)$:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T) = \\ (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T),$$

что доказывает формулу (4.2). Меняя в этом соотношении λ и μ местами, докажем, что $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют друг с другом. □

Следствие 9. *Спектр ограниченного линейного оператора $T : X \to X$ непуст.*

Доказательство. Снова воспользуемся формальным вычислением

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right].$$

Исходя из этого вычисления, введем функцию

$$\widetilde{R_\lambda(T)} := \frac{1}{\lambda}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right].$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, то ряд в квадратных скобках сходится по норме. Прямое вычисление показывает, что

$$(\lambda I - T)\widetilde{R_\lambda(T)} = I = \widetilde{R_\lambda(T)}(\lambda I - T),$$

откуда следует, что $\widetilde{R_\lambda(T)} = R_\lambda(T)$ при $|\lambda| > \|T\|$. Кроме того, оценка указанного ряда показывает, что $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если бы спектр $\sigma(T)$ был пусть, то функция $R_\lambda(T)$ была бы целой аналитической функцией, стремящейся к нулю на бесконечности, т.е. нулем, что невозможно. □

Построенный при доказательстве следствия ряд для резольвенты называется *рядом Неймана* для $R_\lambda(T)$. Из приведенного доказательства следует, что спектр $\sigma(T)$ является непустым замкнутым множеством, содержащимся в круге радиуса $\|T\|$ с центром в нуле, иначе говоря, компактным подмножеством $\mathbb{C}$.

4.3.3 Спектральный радиус

Определение 41. *Спектральным радиусом* оператора T называется величина

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Из теоремы о резольвенте немедленно следует, что функция $R_\lambda(T)$ аналитична в области $U := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| > r(T)\}$.

Так как спектр оператора T содержится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq \|T\|\}$, то $r(T) \leq \|T\|$, откуда следует, что область $V := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| > \|T\|\}$ содержится в области U. Более того, как было показано при доказательстве предыдущей теоремы, резольвента $R_\lambda(T)$ задается в V сходящимся рядом Неймана.

Теорема 33. *Пусть $T : X \to X$ – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен спектральному радиусу оператора:*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Если $X = H$ есть гильбертово пространство и оператор $T = A$ самосопряжен, то $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Как было отмечено, ряд Неймана для $R_\lambda(T)$ сходится в области $V := \{\lambda : \ |\lambda| > \|T\|\}$. Применяя к нему линейный функционал $f \in X^*$, получим разложение в ряд Лорана функции $f(R_\lambda(T))$ в области V:

$$f(R_\lambda(T)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(T^n). \tag{4.4}$$

Но функция $f(R_\lambda(T))$ аналитична также в области $U := \{\lambda : \ |\lambda| > r(T)\}$, поэтому ряд Лорана (4.4) сходится и в этой области.

По неравенству Коши

$$\frac{|f(T^n)|}{|\lambda|^{n+1}} \le C_f,$$

где $C_f > 0$ – константа, зависящая от линейного функционала $f \in X^*$, но не зависящая от n. Отсюда в силу теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что

$$\frac{\|T^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \le C$$

для любого n с константой $C > 0$, не зависящей от n. Переходя к верхнему пределу, получим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|} \le |\lambda|$$

при любом λ с $|\lambda| > r(T)$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|T^n\|} \le r(T). \tag{4.5}$$

С другой стороны, если $\lambda \in \sigma(T)$, то из тождества

$$\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \ldots + T^{n-1})$$

вытекает, что при таком λ оператор $\lambda^n I - T^n$ не обратим (поскольку из обратимости $\lambda^n I - T^n$ вытекало бы, что оператор $\lambda I - T$ имеет обратный, равный $(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \ldots + T^{n-1})(\lambda^n I - T^n)^{-1}$). Поэтому $\lambda^n \in \sigma(T^n)$, откуда

$$|\lambda^n| \le r(T^n) \le \|T^n\| \Longrightarrow |\lambda| \le \|T^n\|^{1/n}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$r(T) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (4.5), получаем, что предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(T)$.

Если $X = H$ есть гильбертово пространство и оператор $T = A$ самосопряжен, то в силу свойства (6) из предложения 11 (см. п. 4.2.2) будем иметь $\|A^2\| = \|A\|^2$, откуда $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. Поэтому

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$

□

4.3.4 Спектр сопряженного оператора

Предложение 14. *Если $T : X \to X$ – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X, то*

$$\sigma(T) = \sigma(T') \quad \text{и} \quad R_\lambda(T') = R_\lambda(T)'.$$

В случае гильбертова пространства $X = H$ справедливы соотношения

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} \quad \text{и} \quad R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*.$$

Доказательство. Из определения банахова сопряженного оператора T' вытекает равенство

$$(\lambda I - T)' = \lambda I - T'.$$

Из него следует первое утверждение предложения. Второе утверждение вытекает из соотношения $T^* = C^{-1}T'C$ для гильбертова сопряженного оператора T^*, где C – сопряженно-линейная изометрия $v \mapsto (v, \cdot)$ гильбертова пространства H на сопряженное к нему пространство H^*. □

Пример 19. Пусть T – оператор левого сдвига в пространстве ℓ^1, действующий по формуле:

$$T : (x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_1, x_2, \dots).$$

Сопряженный к нему оператор T' действует в пространстве ℓ^∞ по формуле:

$$T' : (x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Так как $\|T\| = \|T'\| = 1$, то область $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ лежит как в резольвентном множестве $\rho(T)$, так и в $\rho(T')$.

Исследуем сначала точечный спектр оператора T. Для этого возьмем λ с $|\lambda| < 1$ и рассмотрим вектор $u_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell^1$. Этот вектор является собственным для оператора T с собственным значением λ, т.е.

$$(\lambda I - T)u_\lambda = 0.$$

Следовательно, точечный спектр оператора T содержит открытый единичный круг $\{|\lambda| < 1\}$. Так как спектр $\sigma(T)$ является замкнутым множеством, то $\sigma(T)$ должен совпадать с замкнутым единичным кругом $\{|\lambda| \leq 1\}$ (отсюда, конечно, не следует, что единичная окружность принадлежит точечному спектру T). По доказанному предложению спектр сопряженного оператора $\sigma(T')$ также совпадает с замкнутым единичным кругом.

Покажем однако, что оператор T' вообще не имеет точечного спектра. Действительно, допуская противное, предположим, что вектор $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$ является собственным для оператора T', т.е. $(\lambda I - T')x = 0$. Тогда должны выполняться равенства

$$\lambda x_0 = 0, \quad \lambda x_1 = x_0, \quad \lambda x_2 = x_1, \dots,$$

из которых вытекает, что $x = 0$. Изучим образ оператора $\lambda I - T'$. Для этого вычислим значение функционала $(\lambda I - T')f$, где f – произвольный функционал из $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, на векторе u_λ:

$$[(\lambda I - T')f]\,(u_\lambda) = f\,[(\lambda I - T)(u_\lambda)] = 0.$$

Иными словами, любой функционал из области значений $\mathrm{Im}(\lambda I - T')$ обращается в нуль на векторе u_λ, т.е. область значений $\mathrm{Im}(\lambda I - T')$ не плотна в ℓ^∞ (так как по теореме Хана–Банаха в ℓ^∞ существует функционал, не равный нулю на u_λ). Следовательно, единичный круг $\{|\lambda| < 1\}$ целиком лежит в остаточном спектре оператора T'.

Займемся теперь точками на единичной окружности $\{|\lambda| = 1\}$. Предположим, что $(\lambda I - T)x = 0$ для некоторого вектора $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^1$. Тогда

$$x_1 = \lambda x_0, \quad x_2 = \lambda x_1, \ldots,$$

откуда следует, что вектор $x = x_0(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = x_0 u_\lambda$ не может принадлежать ℓ^1 при $|\lambda| = 1$. Следовательно, на единичной окружности нет точек точечного спектра оператора T. С другой стороны, если бы образ $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ не был плотен в ℓ^1, то в ℓ^∞ нашелся бы ненулевой функционал f такой, что

$$f\left[(\lambda I - T)(u)\right] = 0 \quad \text{для всех } u \in \ell^1.$$

Но это означало бы, что $\left[(\lambda I - T')f\right](u) = 0$ на любом векторе $u \in \ell^1$, т.е. функционал f был бы собственным вектором для оператора T' с собственным значением λ, что противоречит отсутствию точечного спектра у оператора T'. Итак, единичная окружность не принадлежит ни точечному, ни остаточному спектру оператора T.

С другой стороны, она принадлежит остаточному спектру оператора T'. Для доказательства этого утверждения укажем открытый шар в ℓ^∞, не пересекающийся с образом $\mathrm{Im}(\lambda I - T')$.

Заметим, что если $x = (\lambda I - T')y$ для некоторых векторов $x, y \in \ell^\infty$, то компоненты этих векторов будут связаны соотношениями вида

$$x_0 = \lambda y_0, x_1 = \lambda y_1 - y_0, \ldots, x_n = \lambda y_n - y_{n-1}, \ldots,$$

т.е.

$$y_n = \bar{\lambda}^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m x_m.$$

Возьмем теперь вектор z вида $\{1, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^2, \ldots\}$. Утверждается, что замкнутый шар $w \in \ell^\infty : \|w - z\|_{\ell^\infty} \leq 1/2\}$ с центром в точке z и радиуса $1/2$ не пересекается с $\mathrm{Im}(\lambda I - T')$.

Действительно, заметим, прежде всего, что

$$\mathrm{Re}(\lambda^n w_n) = \mathrm{Re}(\lambda^n z_n + \lambda^n(w_n - z_n)) = \mathrm{Re}(\lambda^n z_n) + \mathrm{Re}(\lambda^n(w_n - z_n)).$$

Но

$$-|\lambda^n(w_n - z_n)| \leq \mathrm{Re}(\lambda^n(w_n - z_n) \leq |\lambda^n(w_n - z_n)|,$$

поэтому

$$\mathrm{Re}(\lambda^n w_n) \geq \mathrm{Re}(\lambda^n z_n) - |\lambda^n(w_n - z_n)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Запомним это соотношение и предположим, что для некоторого вектора $u \in \ell^\infty$ выполнено равенство $(\lambda I - T')u = w$. Тогда компоненты этого вектора, как отмечено выше, должны иметь вид

$$u_n = \bar{\lambda}^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m w_m,$$

откуда
$$\|u_n\| = \| \sum_{m=0}^{n} \lambda^m w_m \| \geq \sum_{m=0}^{n} \operatorname{Re}(\lambda^m w_m) \geq \frac{n+1}{2}\,,$$
что, очевидно, невозможно. Следовательно, область значений $\operatorname{Im}(\lambda I - T')$ не пересекается с замкнутым шаром радиуса $1/2$ с центром в точке z. Тем самым, единичная окружность $\{|\lambda| = 1\}$ целиком принадлежит остаточному спектру оператора T'.

Итак, спектр оператора T совпадает с замкнутым единичным кругом, при этом открытый единичный круг целиком принадлежит точечному спектру T, а остаточный спектр T пуст. С другой стороны, спектр сопряженного оператора T' также совпадает с замкнутым единичным кругом, но при этом точечный спектр T' пусть, а остаточный спектр T совпадает со всем замкнутым единичным кругом.

На самом деле, справедливо следующее общее предложение, которое мы оставляем в качестве задачи.

Предложение 15. *1. Если число λ принадлежит остаточному спектру оператора T, то оно лежит и в точечном спектре оператора T'.*

2. Если число λ принадлежит точечному спектру оператора T, то оно лежит либо в точечном, либо в остаточном спектре оператора T'.

Обратимся теперь к случаю гильбертова пространства.

Предложение 16. *Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1. *оператор A не имеет остаточного спектра;*
2. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;*
3. *собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям оператора A, ортогональны друг другу.*

Доказательство. Утверждение (1). Если бы число λ принадлежало остаточному спектру оператора A, то по последнему предложению оно лежало бы и в точечном спектре оператора A, но эти части спектра по определению не пересекаются.

Утверждение (2). Если $z = \lambda + i\mu$, то
$$\| [A - (\lambda + i\mu)I] \|^2 = (v, (A - \lambda I + i\mu)(A - \lambda I - i\mu)v) = \|(A - \lambda I)v\|^2 + \mu^2\|v\|^2.$$
Поэтому при $\mu \neq 0$ имеем
$$\| [A - (\lambda + i\mu)I] \|^2 \geq |\mu|\|v\|,$$
откуда следует, что оператор $A - (\lambda + i\mu)$ обладает ограниченным обратным, определенным на области значений (почему?). Но эта область значений для самосопряженного оператора замкнута (ср. с теоремой Хеллингера–Теплица). Более того, она совпадает со всем пространством, поскольку A не имеет остаточного спектра. Следовательно, $z = \lambda + i\mu \in \rho(A)$ при $\mu \neq 0$, т.е. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Утверждение 3. Если $\lambda \neq \mu$ и $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$, то

$$\lambda(u, v) = (Au, v) = (u, Av) = \mu(u, v),$$

откуда следует, что $(u, v) = 0$. □

4.4 Лекция XIV. Полярное разложение

4.4.1 Положительные операторы и квадратные корни

В этой и последующих лекциях мы понимаем под гильбертовым пространством H сепарабельное гильбертово пространство (подчеркивая это в тех случаях, когда данное ограничение принципиально).

Определение 42. Ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве H называется *положительным*, если

$$(Au, u) \geq 0 \quad \text{для всех } u \in H.$$

Обозначение: $A \geq 0$. Аналогично, неравенство $A \geq B$ означает, что оператор $A - B$ положителен.

Предложение 17. *Каждый положительный оператор в* *комплексном* *гильбертовом пространстве самосопряжен.*

Доказательство. Из равенств

$$(A^*u, u) = (u, Au) \text{ (сопряжение)} = (Au, u)$$

вытекает, что $((A^* - A)u, u) = 0$ для любого $u \in H$. Выведем отсюда, что $A^* = A$.

Обозначим через T оператор $T := A^* - A$. Тогда

$$(T(u + v), u + v) = 0 \Longrightarrow (Tu, v) + (Tv, u) = 0.$$

Заменяя здесь v на iv, получим, что также

$$i(Tv, u) - i(Tu, v) = 0$$

Умножая первое равенство на i и складывая со вторым, получим, что

$$(Tv, u) = 0 \quad \text{для любого } u \in H,$$

откуда $Tv = 0$ для любого $v \in H$, т.е. $T = 0$. □

Замечание 11. Оператор T^*T положителен для любого $T \in B(H)$, поскольку

$$(T^*Tu, u) = \|Tu\|^2 \geq 0 \quad \text{для любого } u \in H.$$

Лемма 4. *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|.$$

Доказательство. Очевидно, $\sup_{\|u\|=1}|(Au,u)| \le \|A\|$. Докажем противоположное неравенство. Заметим, что

$$\mathrm{Re}(Au,v) = \frac{1}{4}\left[(A(u+v),u+v) - (A(u-v),u-v)\right].$$

Пользуясь очевидным неравенством $|(Aw,w)| \le \|w\|^2 \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|$ (для доказательства которого достаточно поделить обе его части на $\|w\|^2$), получим

$$|\mathrm{Re}(Au,v)| \le \frac{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2}{4} \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)| \,\text{(тождество параллелограмма)}$$
$$= \frac{\|u\|^2+\|v\|^2}{2}\sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|,$$

откуда

$$|\mathrm{Re}(Au,v)| \le \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|$$

при $\|u\| = \|v\| = 1$.

Обозначим теперь число $\frac{(Au,v)}{|(Au,v)|}$ через $e^{i\theta}$ (при $(Au,v)=0$ полагаем его равным 1) и положим $v' := e^{i\theta}v$. Тогда $\|v'\| = \|v\|$ и

$$(Au,v') = (Au, e^{i\theta}v) = e^{-i\theta}(Au,v) = |(Au,v)|,$$

так что $(Au,v') = \mathrm{Re}(Au,v') = |(Au,v)|$. Так как по теореме о представлении квадратичной формы линейным оператором (см. предложение 4) имеет место равенство

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=\|v\|=1}|(Au,v)|,$$

то

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=\|v\|=1}|(Au,v)| = \sup_{\|u\|=\|v'\|=1}|(Au,v')| =$$
$$= \sup_{\|u\|=\|v'\|=1}|\mathrm{Re}(Au,v')| \le \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|.$$

Тем самым, $\|A\| = \sup_{\|z\|=1}|(Az,z)|$. □

Теорема 34 (теорема о квадратном корне)**.** *Пусть A – положительный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственный положительный оператор B такой, что $B^2 = A$. Более того, оператор B коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $\|A\| \le 1$. Тогда $(Au,u) \le \|Au\| \cdot \|u\| \le \|u\|^2$, откуда

$$\|I - A\| = \sup_{\|u\|=1}|((I-A)u,u)| \le 1.$$

Рассмотрим разложение в степенной ряд аналитической функции $\sqrt{1-\lambda}$ с центром в нуле

$$\sqrt{1-\lambda} = 1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2\cdot 4}\lambda^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\lambda^3 - \ldots \equiv 1 - c_1\lambda - c_2\lambda^2 - c_3\lambda^3 - \ldots$$

(выбирается ветвь корня $\sqrt{1-\lambda}$, равная 1 при $\lambda = 0$). Этот ряд абсолютно сходится в замкнутом единичном круге $\{|\lambda| \le 1\}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$. Поэтому ряд

$$I - c_1(I-A) - c_2(I-A)^2 - \dots$$

сходится по норме к некоторому оператору B. Возводя этот ряд в квадрат и группируя в нем члены, как в скалярном случае, доказывается, что $B^2 = A$.

Так как $0 \le I - A \le I$, то

$$0 \le ((I-A)^n u, u) \le 1$$

для всех натуральных n и всех u с $\|u\| = 1$. Поэтому

$$(Bu, u) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left((I-A)^n u, u\right) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0$$

при $\|u\| = 1$, т.е. $B \ge 0$.

Оператор B коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A, поскольку он задается сходящимся по операторной норме рядом по степеням $(I - A)$.

Докажем единственность указанного оператора B. Предположим, что существует другой оператор $B_1 \ge 0$ такой, что $B_1^2 = A$. Так как $B_1 A = B_1^3 = AB_1$, то B_1 коммутирует с A и, следовательно, с B. Поэтому

$$(B - B_1)B(B - B_1) + (B - B_1)B_1(B - B_1) = (B^2 - B_1^2)(B - B_1) = 0.$$

Но оба слагаемых в левой части последнего равенства положительны, поэтому каждое из них должно равняться нулю. Тем самым, равна нулю и их разность, совпадающая с $(B - B_1)^3$. Так как оператор $B - B_1$ самосопряжен, то

$$\|B - B_1\|^4 = \|(B - B_1)^4\| = \|(B - B_1)^3(B - B_1)\| = 0,$$

откуда $B = B_1$. □

Замечание 12. Оператор B, построенный в предыдущей теореме, будем обозначать через $B = \sqrt{A}$ и называть *квадратным корнем* из положительного оператора A. Если T – произвольный ограниченный линейный оператор в H, то оператор T^*T, как отмечалось выше, положителен и потому определен оператор $\sqrt{T^*T}$, который обозначается через $|T|$, т.е. $|T| = \sqrt{T^*T}$.

4.4.2 Частично изометрические операторы и полярное разложение

Определение 43. Ограниченный линейный оператор V в гильбертовом пространстве H называется *изометрическим*, если

$$\|Vu\| = \|u\| \quad \text{для всех } u \in H.$$

Оператор V называется *частично изометрическим*, если он изометричен на подпространстве $(\operatorname{Ker} V)^{\perp}$, т.е. оператор $V : (\operatorname{Ker} V)^{\perp} \to \operatorname{Im} V$ унитарен.

Если оператор V частично изометричен, то сопряженный к нему оператор $V^* : \operatorname{Im} V \to (\operatorname{Ker} V)^\perp$ также частично изометричен и является отображением, обратным к $V : (\operatorname{Ker} V)^\perp \to \operatorname{Im} V$.

Предложение 18. *Пусть V есть частично изометрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда операторы $P := V^*V$ и $Q := VV^*$ являются ортогональными проекторами соответственно на полпространства $(Ker V)^\perp$ и $Im V$. Обратно, если для некоторого оператора $V \in B(H)$ операторы V^*V и VV^* являются проекторами, то V частично изометричен.*

Доказательство этого предложения мы оставляем в виде задачи.

Теорема 35 (теорема о полярном разложении)**.** *Пусть T – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует частично изометрический оператор V такой, что*

$$T = V\sqrt{T^*T} = V|T|.$$

Оператор V однозначно определяется условием: $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} T$*. Кроме того,* $\operatorname{Im} V = \overline{\operatorname{Im} T}$*.*

Доказательство. Определим оператор $V : \operatorname{Im}|T| \to \operatorname{Im} T$ по формуле

$$V(|T|u) := Tu.$$

Заметим, что

$$\||T|u\|^2 = (T^*Tu, u) = \|Tu\|^2. \tag{4.6}$$

Поэтому оператор V определен корректно: если $|T|u = |T|v$, то и $Tu = Tv$. Из этого же соотношения следует, что оператор V является изометрическим, поэтому по теореме об ограниченном линейном отображении он допускает продолжение до изометрического оператора

$$V : \overline{\operatorname{Im}|T|} \longrightarrow \overline{\operatorname{Im} T}.$$

Продолжим V на все пространство H, полагая его равным нулю на $(\operatorname{Im}|T|)^\perp$. Так как оператор $|T|$ самосопряжен, то

$$(\operatorname{Im}|T|)^\perp = \operatorname{Ker}|T|.$$

Более того, $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$ ввиду (4.6). Следовательно, $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} T$.

Докажем единственность указанного оператора V. Предположим, что существует другой частично изометрический оператор V_1 с $\operatorname{Ker} V_1 = \operatorname{Ker} T$, который удовлетворяет соотношению $T = V_1|T|$. Тогда, очевидно, V_1 должен совпадать с V на $\operatorname{Im}|T|$. Кроме того, на $(\operatorname{Im}|T|)^\perp = \operatorname{Ker} T$ оба оператора должны быть равны нулю по условию. Поэтому $V_1 = V$. □

4.5 Лекция XV. Компактные операторы

4.5.1 Определение и примеры

Определение 44. Линейный оператор $T : X \to Y$ из банахова пространства X в банахово пространство Y называется *компактным*, если он переводит ограниченные подмножества из X в предкомпактные подмножества из Y. Иными словами, оператор T компактен, если для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in X$, последовательность $\{Tu_n\}$ ее образов содержит сходящуюся подпоследовательность.

Пример 20 (интегральные операторы)**.** Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, интегральный оператор вида

$$(T_K f)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

где функция $K(x,y)$, называемая *ядром* оператора T_K, непрерывна на квадрате $Q = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Из оценки

$$|(T_K f)(x)| \le \sup_{(x,y)\in Q} |K(x,y)| \cdot \sup_{y\in[0,1]} |f(y)|$$

вытекает, что

$$\|T_K f\|_{C[0,1]} \le \sup_{(x,y)\in Q} |K(x,y)| \cdot \|f\|_{C[0,1]},$$

т.е. оператор T_K ограничен в $C[0,1]$.

Обозначим через $C_M[0,1]$ подмножество функций $f \in C[0,1]$, ограниченных константой $M > 0$, т.е. удовлетворяющих оценке: $\|f\|_{C[0,1]} \le M$. Так как функция $K(x,y)$ равномерно непрерывна на квадрате Q, то для заданного $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|K(x,y) - K(x',y)| < \epsilon \quad \text{для всех } y \in [0,1]$$

при $|x - x'| < \delta$. Поэтому для функций $f \in C_M[0,1]$ выполняется оценка

$$|(T_K f)(x) - (T_K f)(x')| \le \sup_{y\in[0,1]} |K(x,y) - K(x',y)| \cdot \|f\|_{C[0,1]} < \epsilon M$$

при $|x - x'| < \delta$. Следовательно, функции $\{T_K f\}$ с $f \in C_M[0,1]$ образуют равностепенно непрерывное семейство функций в $C[0,1]$ и по теореме Асколи множество $T_K(C[0,1])$ предкомпактно. Тем самым, оператор T_K переводит ограниченные множества из $C[0,1]$, совпадающие с подмножествами $C_M[0,1]$, в предкомпактные, т.е. T_K компактен.

Пример 21 (операторы конечного ранга)**.** Предположим, что область значений $\operatorname{Im} T$ ограниченного линейного оператора $T : X \to Y$ конечномерна, т.е. каждый вектор из $\operatorname{Im} T$ представим в виде

$$Tu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i,$$

где $\{v_i\}_{i=1}^N$ – некоторый фиксированный конечный набор векторов из Y. Если $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность векторов из X, то набор отвечающих им коэффициентов $\{\lambda_i^{(n)}\}$ также ограничен, поскольку ограничен оператор T. Поэтому из последовательности коэффициентов $\{\lambda_i^{(n)}\}$ и, тем самым, векторов $\{Tu_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, T компактен.

4.5.2 Компактные операторы и сходимость

Теорема 36. *Компактные операторы отображают слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ слабо сходится к вектору u. Тогда по теореме Банаха–Штейнгауза последовательность норм $\{\|u_n\|\}$ ограничена.

Обозначим $v_n := Tu_n$ и положим $v := Tu$. Тогда для любого функционала $f \in Y^*$ будем иметь

$$f(v_n) - f(v) = f(Tu_n) - f(Tu) = (T'f)(u_n - u),$$

откуда следует, что последовательность $\{v_n\}$ слабо сходится к вектору v.

Допустим, от противного, что $\{v_n\}$ не сходится к v по норме. Тогда найдутся подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$ и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\|v_{n_k} - v\| \geq \epsilon \quad \text{для всех } k.$$

Так как последовательность $\{u_{n_k}\}$ ограничена, а оператор T компактен, то из последовательности $\{v_{n_k}\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору $\tilde{v} \neq v$. Эта последовательность должна тогда сходиться к этому вектору $\tilde{v}$ и слабо вопреки тому, что она слабо сходится к v. Противоречие. □

Предложение 19. *Пусть $T : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. Тогда*

1. *если операторы $T_n : X \to Y$ компактны и $T_n \to T$ в равномерной топологии, то и T компактен;*

2. *оператор T компактен тогда и только тогда, когда компактен сопряженный к нему оператор T';*

3. *если $S : Y \to Z$ – ограниченный линейный оператор, отображающий Y в банахово пространство Z, и один из операторов S, T компактен, то компактна и их композиция $ST : X \to Z$.*

Доказательство этого предложения мы оставляем в качестве задачи.

Теорема 37. *Любой компактный оператор T в сепарабельном гильбертовом пространстве H является равномерным пределом операторов конечного ранга.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в H. Обозначим через $H_n^{\perp}$ подпространство, ортогональное к пространству $H_n := \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, являющемуся линейной оболочкой векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$. Обозначим

$$\lambda_n := \sup_{\substack{u \in H_n^{\perp} \\ \|u\|=1}} \|Tu\|.$$

Ясно, что последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и потому сходится к некоторому пределу $\lambda \geq 0$. Покажем, что $\lambda = 0$. Для этого выберем последовательность векторов $u_n \in H_n^{\perp}$ с $\|u_n\| = 1$, для которой $\lambda_n \geq \|Tu_n\| \geq \frac{\lambda_n}{2}$. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю. (Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться критерием слабой сходимости из примера 16 в п. 3.3.6.) Поэтому по предыдущей теореме 36 последовательность $\{Tu_n\}$ сходится к нулю по норме, откуда вытекает, что $\lambda = 0$.

Тем самым, мы показали, что последовательность операторов конечного ранга

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} (\cdot, e_i) T e_i$$

сходится к оператору T в равномерной топологии, поскольку $\|T_n - T\|$ как раз совпадает с λ_n. □

4.5.3 Альтернатива Фредгольма

Теорема 38 (аналитическая альтернатива Фредгольма). *Пусть $F : D \to \mathcal{K}(H)$ есть аналитическая операторная функция в области D на комплексной плоскости, значения которой являются компактными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда*

1. *либо оператор $(I - F(z))^{-1}$ не существует (как оператор из $B(H)$) ни при каком $z \in D$,*

2. *либо оператор $(I - F(z))^{-1}$ существует (как оператор из $B(H)$) для всех $z \in D \setminus S$, где S – некоторое дискретное подмножество точек из D. В этом случае функция $(I - F(z))^{-1}$ мероморфна всюду в D и аналитична в $D \setminus S$. Вычеты этой функции в полюсах являются операторами конечного ранга. Кроме того, при каждом $z \in S$ уравнение $F(z)u = u$ имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка из D. Мы покажем, что утверждение теоремы выполняется в окрестности точки z_0, откуда, ввиду связности D, будет следовать, что оно выполняется всюду в D (почему?).

Выберем число $r > 0$ так, чтобы в круге $B_r \equiv B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$ выполнялось соотношение

$$\|F(z) - F(z_0)\| < 1/2.$$

Пользуясь теоремой 37 из предыдущего параграфа, найдем оператор конечного ранга T, для которого $\|F(z_0) - T\| < 1/2$. Тогда при $z \in B_r$ будет выполняться оценка

$$\|F(z) - T\| < 1.$$

Поэтому, пользуясь разложением в степенной ряд операторной функции

$$(I - F(z) + T)^{-1},$$

можно убедиться в том, что эта функция корректно определена и аналитична в B_r. Так как T – оператор конечного ранга, то существует система линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_N$ такая, что

$$Tu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(u) v_i.$$

Коэффициенты $\lambda_i(u)$ в этой формуле являются ограниченными линейными функционалами на H, поэтому по теореме Рисса найдутся векторы $u_1, \dots, u_N$ такие, что

$$Tu = \sum_{i=1}^{N} (u, u_i) v_i \quad \text{для всех } u \in H.$$

Рассмотрим функции

$$u_i(z) := \left[(I - F(z) + T)^{-1}\right]^* u_i, \ i = 1, \dots, N,$$

и

$$G(z) := T(I - F(z) + T)^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \left((I - F(z) + T)^{-1} \cdot, u_i\right) v_i = \sum_{i=1}^{N} (\cdot, u_i(z)) v_i.$$

Записывая оператор $I - F(z)$ в виде

$$I - F(z) = (I - F(z) + T) - T = \left(I - T(I - F(z) + T)^{-1}\right)(I - F(z) + T) = \\ = (I - G(z))(I - F(z) + T),$$

мы видим, что этот оператор обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $I - G(z)$. Кроме того, уравнение $v = F(z)v$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда такое решение имеет уравнение $u = G(z)u$.

Допустим, что u – ненулевое решение уравнения $u = G(z)u$. Так как $G(z)$ – оператор конечного ранга с областью значений $\operatorname{Im} G(z) \subset \operatorname{Im} T$, то это решение представляется в виде

$$u = \sum_{j=1}^{N} \mu_j v_j,$$

где числа $\mu_1, \dots, \mu_N$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{N} (v_j, u_i(z)) \mu_j. \tag{4.7}$$

Обратно, если система уравнений (4.7) имеет решение $\{\mu_i\}_{i=1}^N$, то $u = \sum_{j=1}^N \mu_j v_j$ является решением уравнения $u = G(z)u$.

Для того, чтобы система (4.7) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант

$$d(z) = \det(\delta_{ij} - (v_j, u_i(z)) = 0.$$

Так как функция $(v_j, u_i(z)$ аналитична в круге D_r, то и детерминант $d(z)$ задает функцию, аналитическую в этом круге. Поэтому множество

$$S_r = \{z \in B_r : |z - z_0| < r : \ d(z) = 0\}$$

либо совпадает со всем B_r, либо представляет собой дискретное множество точек из B_r.

Предположим, что $d(z) \neq 0$ в некоторой точке $z \in B_r$. Тогда уравнение $(I - G(z))u = v$ имеет для произвольного заданного v решение, задаваемое формулой

$$u = v + \sum_{i=1}^{N} \mu_i v_i,$$

в которой коэффициенты μ_i находятся из линейной системы уравнений

$$\mu_i = (v, u_i(z)) + \sum_{j=1}^{N} (v_j, u_i(z))\mu_j.$$

Эта система имеет единственное решение, если $d(z) \neq 0$. Тем самым, оператор $(I - G(z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z \in S_r$.

Мероморфность функции $(I - F(z))^{-1}$ и конечность рангов вычетов в полюсах вытекают теперь из явной формулы для коэффициентов μ_i, известной в линейной алгебре под названием правила Крамера. □

Следствие 10 (альтернатива Фредгольма)**.** *Если T – компактный оператор в гильбертовом пространстве H, то либо существует ограниченный оператор $(I - T)^{-1}$, либо уравнение $Tu = u$ имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться аналитической альтернативой Фредгольма с $F(z) = zT$ в точке $z = 1$. □

4.5.4 Каноническое представление компактного оператора

Теорема 39. *Если T – компактный оператор в гильбертовом пространстве H, то его спектр $\sigma(T)$ является дискретным множеством без предельных точек за исключением, быть может, нуля. Любое ненулевое значение $\lambda \in \sigma(T)$ является собственным значением конечной кратности.*

Доказательство. Функция $F(z) = zT$ есть целая функция, значения которой являются компактными операторами. Поэтому по аналитической альтернативе Фредгольма множество точек z, для которых уравнение $zTu = u$ имеет ненулевое решение, – дискретно. Если $1/\lambda$ не принадлежит этому множеству, то функция

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}$$

корректно определена. Конечная кратность собственных значений вытекает из конечной кратности рангов вычетов этой функции в полюсах (проверьте!). □

Теорема 40 (теорема Гильберта–Шмидта)**.** *Пусть A – самосопряженный компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^N$, где N либо натуральное число, либо $N=\infty$, из собственных векторов, т.е.*

$$Ae_n = \lambda_n e_n,$$

причем в случае, когда $N=\infty$, собственные значения $\lambda_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Выберем в множестве собственных векторов A, отвечающих каждому собственному значению ортонормированный базис. Так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям A, ортогональны друг другу, то объединение всех таких векторов $\{e_n\}$ является ортонормированной системой в H.

Обозначим через E замыкание линейной оболочки этих векторов. Так как оператор A самосопряжен и сохраняет подпространство E, то он сохраняет и его ортогональное дополнение $E^\perp$ (почему?). Обозначим через $\widetilde{A}$ сужение оператора A на $E^\perp$, так что $\widetilde{A}$ является самосопряженным компактным оператором на $E^\perp$. По предыдущей теореме любое значение $\lambda\in\sigma(\widetilde{A})\setminus\{0\}$ есть собственное значение $\widetilde{A}$, а следовательно и A, конечной кратности, а все они уже включены в E. Поэтому спектральный радиус $\widetilde{A}$ должен быть равен нулю, а так как для самосопряженного оператора спектральный радиус совпадает с нормой, то $\widetilde{A}=0$. Следовательно, $A|E^\perp = 0$, т.е. $E^\perp$ – собственное подпространство A с нулевым собственным значением, что противоречит определению E как подпространства, содержащего все собственные подпространства A. Следовательно, $E=H$.

Собственные значения $\lambda_n(A)$ для оператора, не являющегося оператором конечного ранга, должны стремиться к нулю по предыдущей теореме. □

Собственные числа компактных самосопряженных операторов можно найти, пользуясь их минимаксным свойством, найденным Гильбертом. Приведем этот результат без доказательства, которое можно найти в книге Рисса и Надя. Для простоты сформулируем его для случая положительного компактного оператора.

Теорема 41. *Пусть A – положительный компактный оператор и $\{e_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный базис его собственных векторов, так что $Ae_n=\lambda_n e_n$. Расположим собственные числа λ_n в порядке убывания, так что*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N.$$

Тогда эти собственные числа можно найти, пользуясь следующим минимаксным свойством:

1.

$$\lambda_1 = \max_{v\in H,\|v\|=1} (Av,v);$$

2.

$$\lambda_{n+1} = \min_{L \in E_n} \max_{u \in L^{\perp}, \|v\|=1} (Av, v),$$

где E_n обозначает множество всех n-мерных линейных подпространств в H.

Теорема 42 (представление Шмидта)**.** *Пусть T – компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда найдутся ортонормированные системы векторов $\{u_n\}_{n=1}^{N}$ и $\{v_n\}_{n=1}^{N}$, а также невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{s_n\}_{n=1}^{N}$ такие, что*

$$T = \sum_{n=1}^{N} s_n(\cdot, u_n)v_n, \tag{4.8}$$

где N – либо натуральное число, либо $N = \infty$. При этом ряд в правой части сходится в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Оператор T допускает полярное представление вида

$$T = V|T|,$$

где V – частично изометрический оператор, а $|T| = \sqrt{T^*T}$. Оператор $A := T^*T$ компактен и положителен. Покажем, что положительный оператор $|T| = \sqrt{A}$ также компактен.

Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть S – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H такой, что оператор S^*S компактен. Тогда оператор S также компактен.*

Доказательство леммы. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная ограниченная последовательность векторов из H. Покажем, что из последовательности образов $\{Su_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поскольку оператор S^*S по условию компактен, то из последовательности $\{S^*Su_n\}$ сходящуюся подпоследовательность выбрать можно. Не ограничивая общности, можно считать, что уже сама последовательность $\{S^*Su_n\}$ сходится и, следовательно, является последовательностью Коши.

С другой стороны,

$$\|Su_n - Su_m\|^2 = (S^*S(u_n - u_m), (u_n - u_m)) \leq \|S^*S(u_n - u_m)\| \cdot \|u_n - u_m\|,$$

откуда следует, что в этом случае и последовательность $\{Su_n\}$ является последовательностью Коши, и потому сходится. □

Применяя доказанную лемму к операторам $S = \sqrt{A}$ и $S^*S = A$, получим, что оператор $|T| = \sqrt{A}$ компактен.

По теореме Гильберта–Шмидта он допускает представление в виде ряда

$$|T| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)u_n,$$

сходящегося в равномерной операторной топологии, где собственные числа s_n оператора $|T|$ расположены в порядке убывания. Применяя к обеим его частям частично изометрический оператор V, получим

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)Vu_n.$$

Заметим, что векторы $v_n := Vu_n$ принадлежат области значений $\operatorname{Im}|T|$ оператора $|T|$, на которой оператор V является изометрическим. Следовательно, система векторов $\{v_n\}_{n=1}^N$ также является ортонормированной. Тем самым, оператор T допускает представление в виде ряда (4.8). □

Замечание 13. Ряд (4.8), построенный в предыдущей теореме, называется *разложением Шмидта* компактного оператора T. Его коэффициенты $s_n(T)$, совпадающие с собственными числами $\lambda_n(|T|)$ положительного компактного оператора $|T|$, называются *сингулярными* или просто *s-числами* компактного оператора T, так что:

$$s_n(T) = \lambda_n(|T|) = \lambda_n(\sqrt{T^*T}).$$

Замечание 14. Чтобы не рассматривать каждый раз отдельно случай операторов конечного ранга, представимых в виде конечного ряда

$$T = \sum_{n=1}^{N} s_n(\cdot, u_n)v_n,$$

где N – натуральное число, условимся в подобных случаях дополнять ортонормированные системы $\{u_n\}_{n=1}^N$ и $\{v_n\}_{n=1}^N$ произвольным образом до счетных ортонормированных систем $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ в H и полагать $s_{N+1} = s_{N+2} = \ldots = 0$, так чтобы рассматриваемый оператор представлялся в виде

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

4.6 Лекция XVI. Подпространства компактных операторов

4.6.1 Операторы Гильберта–Шмидта

Определение 45. Компактный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если его сингулярные числа удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 < \infty.$$

Нормой Гильберта–Шмидта такого оператора называется число

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2}.$$

Пространство операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, обозначается через $\mathrm{HS}(H)$.

Теорема 43. *Следующие свойства компактного оператора T, действующего в гильбертовом пространстве H, эквивалентны:*

1. *T есть оператор Гильберта–Шмидта;*

2. *для некоторого ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H выполняется неравенство*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty;$$

3. *для любого ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H выполняется неравенство*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty;$$

4. *матричные компоненты (a_{mn}) оператора T в некотором ортонормированном базисе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H удовлетворяют оценке*
$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < \infty;$$

5. *матричные компоненты (a_{mn}) оператора T в произвольном ортонормированном базисе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H удовлетворяют оценке*
$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 < \infty.$$

Если оператор T обладает этими свойствами, то суммы всех указанных рядов совпадают и равны
$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2.$$

Доказательство. Импликации $(3) \Longrightarrow (2)$ и $(5) \Longrightarrow (4)$ тривиальны. Далее заметим, что по равенству Парсеваля в произвольном ортонормированном базисе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H выполняется соотношение
$$\|Te_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Te_m, e_n)|^2,$$
откуда
$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_m, e_n)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2. \tag{4.9}$$
Это доказывает эквивалентности $(2) \Longleftrightarrow (4)$ и $(3) \Longrightarrow (5)$.

Остается проверить импликации $(1) \Longrightarrow (3)$ и $(2) \Longrightarrow (1)$. Они будут вытекать из следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть T – компактный оператор, имеющий разложение Шмидта вида*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

Тогда для любого ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H ряды $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2$ сходятся или расходятся одновременно. Если они сходятся, то их суммы совпадают.

Доказательство леммы. Заметим, что

$$(Te_k, v_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m(e_k, u_m)v_m, v_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} s_m(e_k, u_m)(v_m, v_n) = s_n(e_k, u_n).$$

Учитывая, что $\|Te_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Te_k, v_n)|^2$, получим отсюда, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2|(e_k, u_n)|^2$$

сходятся или расходятся одновременно и если сходятся, то их суммы равны.

Для произвольного натурального N имеем в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} s_n^2|(e_k, u_n)|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} s_n^2|(e_k, u_n)|^2 = \sum_{n=1}^{N} s_n^2\|u_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} s_n^2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} s_n^2|(e_k, u_n)|^2 < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 < \infty$$

и если эти суммы конечны, то они совпадают. □

Последнее утверждение теоремы о совпадении сумм всех участвующих в ее формулировке рядов вытекает из леммы 6 и равенства (4.9). □

Предложение 20. *Пространство $\mathrm{HS}(H)$ операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, обладает следующими свойствами:*

1. $\mathrm{HS}(H)$ *является линейным подпространством в пространстве $\mathcal{K}(H)$ компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, замкнутым по норме Гильберта–Шмидта $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$.*

2. $\mathrm{HS}(H)$ *является гильбертовым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ и скалярным произведением*

$$(S, T) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\bar{b}_{mn},$$

где a_{mn} и b_{mn} – матричные элементы операторов S и T соответственно в произвольном ортонормированном базисе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H.

Доказательство. Фиксируем произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H и сопоставим каждому компактному оператору T из $\mathcal{K}(H)$ его матрицу $\{a_{mn} = (Te_m, e_n)\}$ в базисе $\{e_n\}$. Этим определяется отображение из пространства $\mathcal{K}(H)$ в пространство двойных последовательностей, которое, очевидно, линейно и инъективно. Из доказанной теоремы 43 следует, что оно осуществляет биекцию

$$V : \mathrm{HS}(H) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Согласно той же теореме $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|V(T)\|_{\ell^2}$, т.е. V является изометрией пространства $\mathrm{HS}(H)$, наделенного нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$, на гильбертово пространство $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Так как норма в $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ порождается скалярным произведением $(a, b) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\bar{b}_{mn}$, то отсюда вытекают оба утверждения теоремы. $\square$

Пример 22 (интегральные операторы в $L^2(0,1)$)**.** Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ интегральный оператор вида

$$g(x) \equiv (T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

с ядром $K(x,y) \in L^2(Q)$, где Q – квадрат $Q = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. По теореме Фубини функция $K_x(y) \equiv K(x,y)$ для почти всех $x \in [0,1]$ принадлежит $L^2(0,1)$, поэтому указанный интеграл корректно определен для таких x, будучи равным скалярному произведению функций K_x и $\overline{f}$ в $L^2(0,1)$. Так как по неравенству Коши–Буняковского

$$|g(x)| \le \|K_x\|_{L^2(0,1)} \cdot \|f\|_{L^2(0,1)},$$

то

$$\int_0^1 |g(x)|^2 \le \int_0^1 \|K_x\|^2_{L^2(0,1)}dx \cdot \|f\|_{L^2(0,1)} = \left(\iint_Q |K(x,y)|^2 dx\, dy\right) \|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{4.10}$$

Отсюда следует, что $g \in L^2(0,1)$ и

$$\|g\|_{L^2(0,1)} \le \|K\|_{L^2(Q)} \|f\|_{L^2(0,1)},$$

т.е. T_K есть ограниченный линейный оператор в $L^2(0,1)$ с нормой, не превосходящей $\|K\|_{L^2(Q)}$.

На самом деле, справедливо более общее

Предложение 21. *Ограниченный линейный оператор в $L^2(0,1)$ является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда он является интегральным оператором указанного выше вида. При этом отображение $K \mapsto T_K$, сопоставляющее ядру K интегральный оператор T_K, является унитарным изоморфизмом пространства $L^2(Q)$ на пространство $\mathrm{HS}(L^2(0,1))$.*

Доказательство достаточности. Пусть T есть оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $L^2(0,1)$. Тогда он допускает представление Шмидта вида

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n,$$

где $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированные системы, состоящие из квадратично интегрируемых функций на $[0,1]$. Положим

$$f_n(x,y) := v_n(x)\overline{u_n(y)} \quad \text{при } (x,y) \in Q.$$

Из теоремы Фубини следует, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированная система в $L^2(Q)$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2$ вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} s_n f_n$ сходится в $L^2(Q)$ к некоторой функции $K \in L^2(Q)$.

Рассмотрим интегральный оператор T_K с ядром K в $L^2(0,1)$ и введем для любого натурального N интегральный оператор T_{K_N} с ядром

$$K_N(x,y) = \sum_{n=1}^{N} s_n f_n.$$

Тогда для любого $\varphi \in L^2(0,1)$ и почти всех $x \in [0,1]$ выполняется равенство

$$(T_{K_N}\varphi)(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} s_n f_n(x,y)\varphi(y)dy$$

$$= \sum_{n=1}^{N} s_n v_n(x) \int_0^1 \overline{u_n(y)}\varphi(y)dy = \sum_{n=1}^{N} s_n(\varphi, u_n)v_n(x).$$

Иными словами,

$$T_{K_N} = \sum_{n=1}^{N} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

Из доказанной теоремы 43 следует, что исходный оператор T есть равномерный предел операторов T_{K_N} при $N \to \infty$. Кроме того, из неравенства (4.10) вытекает оценка

$$\|T_K - T_{K_N}\| \le \|K - K_N\|_{L^2(Q)},$$

откуда $T = T_K$.

Доказательство необходимости. Пусть теперь $T = T_K$. Выберем два произвольных ортонормированных базиса $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ в $L^2([0,1])$ и рассмотрим T_K как оператор, действующий из пространства $L_y^2([0,1])$ с базисом $\{u_n\}$ в пространство $L_x^2([0,1])$ с базисом $\{v_m\}$. Матричные элементы оператора T_K в этих базисах имеют вид

$$a_{mn} = \iint_Q K(x,y)v_m(x)\overline{u_n(y)}dx\,dy.$$

С другой стороны, эти числа совпадают с коэффициентами Фурье функции $K(x,y) \in L^2(Q)$ относительно ортонормированного базиса $\{v_m(x)\overline{u_n(y)}\}_{m,n=1}^{\infty}$. Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$\|K\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|^2.$$

По теореме 43, доказанной в начале этого при́графа, оператор T_K есть оператор Гильберта–Шмидта с нормой $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|K\|_{L^2(Q)}^2$. □

4.6.2 Ядерные операторы

Определение 46. Компактный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *ядерным*, если сходится ряд из его s-чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty.$$

Число $\|T\|_N := \sum_{n=1}^{\infty} s_n$ называется его *ядерной нормой* оператора T. Множество всех ядерных операторов в H обозначается через $N(H)$.

Теорема 44. *Пусть T – ядерный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий представление Шмидта вида*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

Тогда для любого ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n, e_n)$$

абсолютно сходится и его сумма равна $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(v_n, u_n)$. Тем самым, она не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_n\}$ и называется следом $\mathrm{tr}T$ оператора T.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)(v_n, e_k). \tag{4.11}$$

Он абсолютно сходится, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, u_n)||(v_n, e_k)|$$

представляет собой скалярное произведение двух векторов из ℓ^2 с единичной нормой и, тем самым, его сумма не превосходит 1, а $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)(v_n, e_k)$$

также абсолютно сходится и его сумма совпадает с суммой ряда (4.11).

Из соотношения

$$Te_k = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)v_n$$

мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(Te_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)v_n, e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)(v_n, e_k).$$

С другой стороны, разлагая векторы u_n и v_n по базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(e_k, u_n)(v_n, e_k) = (v_n, u_n),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} s_n(e_k, u_n)(v_n, e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}(e_k, u_n)(v_n, e_k)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(v_n, u_n),$$

что доказывает утверждение теоремы. □

Предложение 22. *След ядерного оператора обладает следующими свойствами:*

1. *если S, T – ядерные операторы, то операторы $S+T$ и λS, $\lambda \in \mathbb{C}$, также являются ядерными и*

$$\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr} S + \operatorname{tr} T, \quad \operatorname{tr}(\lambda S) = |\lambda| \operatorname{tr} S;$$

2. *если T – ядерный оператор, то сопряженный к нему оператор T^* также является ядерным и $\operatorname{tr} T^* = \operatorname{tr} T$;*
3. *если A и B – положительные ядерные операторы, причем $B \geq A$, то $\operatorname{tr} B \geq \operatorname{tr} A$;*
4. *если S – ограниченный оператор, а T – ядерный, то операторы ST и TS – ядерные и $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$;*
5. *композиция двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором.*

Доказательство. Доказательство свойства (1). Если T – ядерный оператор с представлением Шмидта

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n,$$

то для любых двух ортонормированных систем $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e''_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} s_n(e'_k, u_n)(v_n, e''_k)$$

абсолютно сходится, поскольку, как и в предыдущей теореме, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(e'_k, u_n)||(v_n, e''_k)|$$

представляет собой скалярное произведение двух векторов из ℓ^2 с единичной нормой, а $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$.

Так как

$$(Te_k', e_k'') = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(e_k', u_n)(v_n, e_k''),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Te_k', e_k'')| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} s_n|(e_k', u_n)||(v_n, e_k'')| \le \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \|T\|_N.$$

Поэтому если операторы S, T – ядерные, а оператор $R := S + T$ имеет представление Шмидта вида

$$R = S + T = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(\cdot, e_n')e_n'',$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big((S+T)e_n', e_n''\Big) \le \|S\|_N + \|T\|_N,$$

откуда следует, что оператор $S+T$ также является ядерным. Проверку остальных утверждений в свойстве (1) оставляем читателю.

Доказательство свойства (2). Пусть T – ядерный оператор с представлением Шмидта

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

Пользуясь этим представлением, найдем вид сопряженного оператора T^*. Имеем

$$(Tu, v) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(u, u_n)(v_n, v) = \left(u, \sum_{n=1}^{\infty} s_n(v, v_n)u_n\right) = (u, T^*v),$$

где

$$T^*v = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(v, v_n)u_n.$$

Из представлений Шмидта для T и T^* видно, что $Tu_n = s_nv_n$ и $T^*v_n = s_nu_n$, откуда

$$T^*Tu_n = s_n^2u_n \quad \text{и} \quad TT^*v_n = s_n^2v_n.$$

Поэтому, в силу замечания 13 из п. 4.5.4, s-числа операторов T и T^* совпадают, откуда вытекает свойство (2).

Доказательство свойства (3). Для доказательства этого свойства воспользуемся минимаксным свойством собственных чисел (см. теорему 41 из п. 4.5.4). Согласно этому свойству

$$\lambda_{n+1}(B) = \min_{L\in E_n} \max_{u\in L^\perp, \|v\|=1} (Bv, v) \ge \min_{L\in E_n} \max_{u\in L^\perp, \|v\|=1} (Av, v) = \lambda_{n+1}(A)$$

где E_n обозначает множество всех n-мерных линейных подпространств в H. Так как для положительных операторов $s_n(A) = \lambda_n(|A|) = \lambda_n(A)$, то получаем, что $s_n(A) \le s_n(B)$, откуда и следует свойство (3).

Доказательство свойства (4). Докажем, что для s-чисел оператора ST выполняется оценка

$$s_n(ST) \le \|S\|s_n(T). \tag{4.12}$$

Действительно, сингулярные числа рассматриваемых операторов равны

$$s_n^2(ST) = \lambda_n\left((ST)^*(ST)\right), \quad s_n^2(T) = \lambda_n(T^*T).$$

С другой стороны,

$$((ST)^*(ST)v, v) = \|STv\|^2 \le \|S\|^2\|Tv\|^2 = \\ = \|S\|^2(Tv, Tv) = \big(\|S\|^2T^*Tv, v\big),$$

откуда

$$0 \le (ST)^*(ST) \le \|S\|^2T^*T.$$

Теперь оценка (4.12) вытекает из свойства (3).

Чтобы доказать оценку

$$s_n(TS) \le \|S\|s_n(T), \tag{4.13}$$

воспользуемся свойством (2). Имеем

$$s_n(TS) = s_n(T^*S^*) \le \|S^*\|s_n(T^*) = \|S\|s_n(T).$$

Из доказанных оценок (4.12) и (4.13) вытекает, что операторы ST и TS являются ядерными, если оператор T – ядерный, а S – ограниченный оператор. Покажем, что $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$. Пусть оператор T имеет представление Шмидта вида

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(\cdot, u_k)v_k.$$

Тогда для любого n будем иметь

$$(STu_n, u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(u_n, u_k)(Sv_k, u_n) = s_n(Sv_n, u_n),$$

$$(TSv_n, v_n) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(Sv_n, u_k)(v_k, v_n) = s_n(Sv_n, u_n),$$

т.е.

$$(STu_n, u_n) = (TSv_n, v_n)$$

при всех n.

Из представления Шмидта для оператора T следует, что $STu = 0$ для любого вектора u, ортогонального линейной оболочке векторов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, а образ $\mathrm{Im}\, TS$ содержится в замыкании линейной оболочки векторов $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому дополняя системы $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольным образом до ортонормированных базисов, можем написать

$$\mathrm{tr}(ST) = \sum_{n=1}^{\infty}(STu_n, u_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(TSv_n, v_n) = \mathrm{tr}(TS).$$

Доказательство свойства (5). Пусть S и T – операторы Гильберта–Шмидта и разложение Шмидта оператора ST имеет вид

$$ST = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, u_n)v_n.$$

По теореме 43 из п. 4.6.1 пространство $\mathrm{HS}(H)$ операторов Гильберта–Шмидта унитарно эквивалентно гильбертову пространству $\ell^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, причем указанный унитарный изоморфизм сопоставляет оператору T совокупность его матричных компонент. Фиксируем произвольный ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве H. Тогда по упомянутой теореме произведение ST операторов S и T будет иметь в этом базисе матричные компоненты

$$(ST)_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}b_{kl},$$

где

$$a_{nk} = (Se_k, v_n),\ \ b_{kl} = (Tu_l, e_k).$$

По теореме 43 из п. 4.6.1

$$\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N}((STe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}b_{kn}.$$

Двойной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}b_{kn}$$

по теореме 43 представляет собой скалярное произведение двух последовательностей из $\ell^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ и потому сходится. Следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ также сходится, т.е. произведение ST является ядерным оператором, причем след $\mathrm{tr}(ST)$ совпадает с указанным скалярным произведением. □

Из доказанных результатов вытекает

Следствие 11. *Множество ядерных операторов* $\mathrm{N}(H)$ *является линейным подпространством в пространстве* $\mathcal{K}(H)$ *компактных операторов в* H, *замкнутым по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{N}}$. *Тем самым,* $\mathrm{N}(H)$ *есть банахово пространство, являющееся идеалом в алгебре* $\mathcal{K}(H)$.

Краткое содержание и библиографические указания к главе 4

Глава открывается лекцией 4.1, посвященной топологиям на пространствах ограниченных линейных операторов, в изложении которой мы следуем [7], гл. VI, п.1. Отметим здесь только результат о слабой сходимости ограниченных операторов.

В лекции 4.2 рассматриваются операторы, сопряженные к линейным операторам в банаховом и гильбертовом пространствах. Эти результаты можно найти в [7], гл. VI, п.2. Здесь же дано стандартное разложение гильбертова пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного оператора, а также его банахов аналог. Эти результаты заимствованы из [9], п.4.12.

В следующей лекции 4.3 начинается изучение спектра оператора. Здесь доказывается основная теорема о резольвенте и вспомогательная теорема об эквивалентности слабой и сильной аналитичности функций со значениями в банаховом пространстве. Наше изложение следует [7], гл. VI, п.3. Доказательство формулы спектрального радиуса проводится также, как в [9], п.10.13 и [12], гл.5, п.3. Исследование спектров оператора левого сдвига в пространстве ℓ^2 и сопряженного к нему оператора взято из [7], гл. VI, п.3. В заключение дается характеристика спектра самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Лекция 4.4 посвящена полярному разложению. Она открывается предложением о самосопряженности положительных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, доказательство которого основано на [9], п.12.7, и технической леммой, позволяющей вычислить норму самосопряженного оператора в терминах его квадратичной формы, доказательство которой взято из [6], гл.V, п.2.1. Теорема о квадратном корне и теорема о полярном разложении излагаются также, как в [7], гл. VI, п.4.

В лекции 4.4 изучается класс компактных операторов. В ее изложении мы следуем в основном [7], гл. VI, п.3. Первым важным результатом является доказательство того, что компактные операторы переводят слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме. Отметим также теорему об аппроксимации компактных операторов операторами конечного ранга. Центральным результатом является альтернатива Фредгольма, которая позволяет получить описание спектра компактного оператора. Другим важным результатом является теорема Гильберта–Шмидта, представляющая собой вариант спектральной теоремы для компактных самосопряженных операторов. Формулируется минимаксное свойство собственных чисел положительных компактных операторов, доказательство которого можно найти в [8], гл.VI, п.93. В заключение приводится еще один важный результат — представление Шмидта компактных операторов, являющееся одним из главных инструментов для работы с компактными несамосопряженными операторами. Доказательство следует [1], гл.1, п.2.2 с использованием технической леммы о компактности корня из положительного компактного оператора, заимствованной из [10], гл.IV, п.2.2. Представление Шмидта позволяет также ввести понятие сингулярных или s-чисел компактного оператора.

В лекции 4.5 изучаются классы компактных операторов, образованные операторами Гильберта–Шмидта и ядерными операторами. В изложении этой лек-

ции мы следуем в основном [12], гл.3, п.4. Теорема 43 характеризует операторы Гильберта–Шмидта как компактные операторы с квадратично суммируемыми рядами s-чисел. Дается описание интегральных операторов Гильберта–Шмидта в пространстве $L^2(0,1)$. Теорема 44 характеризует ядерные операторы как компактные операторы с суммируемыми рядами s-чисел. Для ядерных операторов корректно определено понятие следа, который обладает свойствами, аналогичными свойствам матричного следа. Композиция двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором.

Глава 5

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

5.1 Лекция XVII. Функциональное исчисление и спектральные меры

5.1.1 Функциональное исчисление в классе непрерывных функций

Теорема 45 (о функциональном исчислении в классе непрерывных функций). *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H (которое здесь и далее в этой главе предполагается сепарабельным). Тогда существует единственное отображение*

$$\Phi : C(\sigma(A)) \longrightarrow B(H),$$

обладающее следующими свойствами:

1. *Φ есть непрерывный $\star$-гомоморфизм алгебр, т.е. Φ непрерывен относительно равномерных норм на алгебрах $C(\sigma(A))$, $B(H)$ и при этом выполняются следующие соотношения:*

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \ \Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f), \ \Phi(1) = I,$$
$$\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*;$$

2. *если $f(\lambda) = \lambda$, то $\Phi(f) = A$;*

3. *если вектор $\varphi \in H$ является собственным для оператора A с собственным значением λ, т.е. $A\varphi = \lambda\varphi$, то*

$$\Phi(f)\varphi = f(\lambda)\varphi;$$

4. *$\sigma\left[\Phi(f)\right] = \{f(\lambda) : \ \lambda \in \sigma(A)\}$;*

5. *$\|\Phi(f)\|_{B(H)} = \|f\|_{C(\sigma(A))}$;*

6. *если $f \geq 0$, то и $\Phi(f) \geq 0$.*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Стоуна–Вейерштрасса и две следующие леммы.

Лемма 7. *Сопоставим полиному* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ *операторный полином*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n.$$

Тогда

$$\sigma\left(P(A)\right) = \{P(\lambda) :\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Запишем полином $P(x) - P(\lambda)$ в виде

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x),$$

где Q – некоторый полином. Тогда

$$P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I)Q(A).$$

Так как $\lambda \in \sigma(A)$, то оператор $A - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного. То же самое верно и для оператора $P(A) - P(\lambda)I$ (поскольку в противном случае оператор, обратный к $A - \lambda I$, задавался бы формулой $Q(A)\left(P(A) - P(\lambda)I\right)^{-1}$). Следовательно, $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$.

Обратно, пусть $\mu \in \sigma(P(A))$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни полинома $P(x) - \mu$, т.е.

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n).$$

Если бы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(A)$, то у оператора $P(A) - \mu I$ существовал бы ограниченный обратный, задаваемый формулой

$$(P(A) - \mu I)^{-1} = \frac{1}{a}(A - \lambda_n)^{-1} \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_1)^{-1},$$

что противоречит условию $\mu \in \sigma(P(A))$. Следовательно, найдется одно из чисел $\lambda_i =: \lambda$, принадлежащее $\sigma(A)$, для которого $P(\lambda) = \mu$. □

Лемма 8. *Справедливо соотношение*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку равенств:

$$\|P(A)\|^2 = \|P(A)^* P(A)\| = \|(\bar{P}P)(A)\| \text{ (по теореме о спектральном радиусе)}$$

$$= \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{P}P(A))} |\lambda| \text{ (по лемме 7)} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\bar{P}P(\lambda)| = \left[\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|\right]^2.$$

□

Отступление: теорема Стоуна–Вейерштрасса Пусть X есть компактное хаусдорфово топологическое пространство и $C(X)$ – алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на X, а $C_R(X)$ – ее подалгебра, состоящая из вещественнозначных функций.

Теорема 46 (теорема Стоуна–Вейерштрасса для вещественного случая)**.** *Пусть B есть подалгебра в алгебре $C_R(X)$, замкнутая по норме $\|\cdot\|_{C_R(X)}$. Предположим, что B разделяет точки X, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ найдется функция $f \in B$ такая, что $f(x) \neq f(y)$. Тогда либо $B = C_R(X)$, либо*

$$B = \{f \in C_R(X): \ f(x_0) = 0 \ \text{для некоторой точки } x_0 \in X\}.$$

Если рассматриваемая подалгебра B содержит единицу, то $B = C_R(X)$.

Теорема 47 (теорема Стоуна–Вейерштрасса для комплексного случая)**.** *Пусть B есть подалгебра в алгебре $C(X)$, замкнутая относительно комплексного сопряжения, т.е. $f \in B \Longrightarrow \bar{f} \in B$. Если подалгебра B замкнута в $C(X)$ и разделяет точки X, то либо $B = C(X)$, либо*

$$B = \{f \in C(X): \ f(x_0) = 0 \ \text{для некоторой точки } x_0 \in X\}.$$

Замечание 15. Условие замкнутости подалгебры B относительно комплексного сопряжения является существенным. Действительно, рассмотрим в качестве примера подалгебру $A(D)$, состоящую из функций, аналитических в единичном круге $D \subset \mathbb{C}$ и непрерывных вплоть до его границы. Она удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме замкнутости относительно сопряжения и теорема Стоуна–Вейерштрасса для очевидно неверна.

Доказательство теоремы 45. Определим отображение Φ на полиномах, полагая $\Phi(P) = P(A)$. Тогда по лемме 8

$$\|\Phi(P)\|_{B(H)} = \|P\|_{C(\sigma(A))},$$

откуда по теореме об ограниченном линейном отображении следует, что отображение Φ допускает единственное продолжение на замыкание множества полиномов в алгебре $C(\sigma(A))$. Так как полиномы образуют алгебру, содержащую единицу, замкнутую относительно комплексного сопряжения и разделяющую точки спектра, то по теореме Стоуна–Вейерштрасса замыкание этой алгебры должно совпадать со всей алгеброй $C(\sigma(A))$. Тем самым, мы получаем отображение

$$\Phi: C(\sigma(A)) \longrightarrow B(H).$$

Оно, очевидно, обладает свойствами (1),(2),(5), поскольку эти свойства выполняются для полиномов. Кроме того, на собственных векторах φ оператора A, удовлетворяющих условию $A\varphi = \lambda\varphi$, выполняется соотношение

$$\Phi(P)\varphi = P(A)\varphi = P(\lambda)\varphi,$$

откуда вытекает свойство (3). Свойство (4) следует из леммы 8. Для доказательства свойства (6) заметим, что если функция $f \geq 0$, то она представляется в виде $f = g^2$, где g – непрерывная вещественнозначная функция на $\sigma(A)$. Поэтому $\Phi(f) = \Phi(g)^2$, где $\Phi(g)$ – самосопряженный оператор на H. Следовательно, оператор $\Phi(f)$ положителен. □

Замечание 16. Из доказанной теоремы немедленно вытекает теорема о квадратном корне. Действительно, если $A \geq 0$, то $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$ и $\Phi(f)^2 = A$ для функции $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

Замечание 17. Из свойства (5) доказанной теоремы вытекает следующая оценка резольвенты оператора A:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))}$$

при $\lambda \notin \sigma(A)$.

5.1.2 Спектральные меры

Отступление: борелевские меры и теорема Рисса–Маркова

Пусть X – компактное хаусдорфово топологическое пространство. Рассмотрим на X борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(X)$ измеримых множеств, порожденную всеми открытыми подмножествами в X. Меры на пространстве X, снабженном этой σ-алгеброй, называются *борелевскими*.

Напомним, что борелевская мера μ называется *регулярной*, если для любого измеримого подмножества $E \in \mathcal{B}(X)$ выполняется соотношение

$$\mu(E) = \inf_{U \supset E} \{\mu(U) : \ U \text{ открыто в } X\}$$
$$= \sup_{C \subset E} \{\mu(C) : \ C \in \mathcal{B}(X) \text{ – компактное подмножество в } X\}.$$

Если μ – регулярная борелевская мера, то пространство $C(X)$ непрерывных функций на X содержится и плотно в $L^p(X, d\mu)$ для всех $p < \infty$.

Пусть μ – конечная регулярная борелевская мера на X, т.е. $\mu(X) < \infty$. Рассмотрим отображение $C(X) \to \mathbb{C}$, задаваемое формулой

$$C(X) \ni f \longmapsto \ell(f) = \int_X f d\mu.$$

Это отображение линейно и удовлетворяет оценке

$$|\ell(f)| \leq \int_X |f| d\mu \leq \|f\|_{C(X)} \mu(X),$$

так что ℓ есть непрерывный линейный функционал на $C(X)$. Этот функционал *положителен* в том смысле, что $\ell(f) \geq 0$ всякий раз, когда $f \geq 0$.

Теорема 48 (теорема Рисса–Маркова)**.** *Пусть X есть компактное хаусдорфово топологическое пространство. Тогда для всякого положительного непрерывного линейного функционала ℓ на $C(X)$ найдется единственная регулярная борелевская мера μ на X такая, что*

$$\ell(f) = \int_X f d\mu.$$

Вернемся к спектральным мерам. Пусть A есть ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $v \in H$. Тогда отображение $C(\sigma(A)) \to \mathbb{C}$, задаваемое формулой

$$f \longmapsto (f(A)v, v)$$

является положительным непрерывным функционалом на пространстве $C(\sigma(A))$. Поэтому по теореме Рисса–Маркова существует единственная регулярная борелевская мера μ_v на $\sigma(A)$, для которой

$$(f(A)v, v) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_v(\lambda),$$

которая называется *спектральной мерой*, ассоциированной с вектором v.

Пользуясь этой мерой, можно продолжить построенное выше функциональное исчисление с непрерывных на произвольные ограниченные функции, измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских множеств на прямой. Действительно, если f – ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}$, то определим оператор $f(A)$ формулой

$$(f(A)v, v) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_v(\lambda).$$

Квадратичная форма $(f(A)v, v)$ определяет единственным образом полуторалинейную форму $(f(A)u, v)$ с помощью поляризационного тождества (см. замечание 2 из п. 2.2.1), а указанная полуторалинейная форма задает ограниченный линейный оператор $f(A)$.

Теорема 49 (о функциональном исчислении в классе ограниченных функций)**.** *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственное отображение $\widehat{\Phi}$, сопоставляющее произвольной ограниченной борелевской функции f на прямой ограниченный линейный оператор $\widehat{\Phi}(f)$. Указанное отображение обладает следующими свойствами:*

1. *$\widehat{\Phi}$ есть непрерывный $\star$-гомоморфизм алгебр;*

2. *если $f(\lambda) = \lambda$, то $\widehat{\Phi}(f) = A$;*

3. *если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к функции f, т.е. $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ при всех λ и совокупность норм $\|f_n\|_{C(\mathbb{R})}$ ограничена, то последовательность операторов $\widehat{\Phi}(f_n)$ сходится к оператору $\widehat{\Phi}(f)$ сильно;*

4. *если вектор $\varphi \in H$ является собственным для оператора A с собственным значением λ, т.е. $A\varphi = \lambda\varphi$, то*

$$\widehat{\Phi}((f)\varphi = f(\lambda)\varphi;$$

5. *если $f \geq 0$, то и $\widehat{\Phi}(f) \geq 0$.*

Нужно проверить только утверждение (3), которое мы оставляем в виде задачи.

5.2 Лекция XVIII. Спектральная теорема в терминах оператора умножения

5.2.1 Спектральная теорема

Определение 47. Вектор $v \in H$ называется *циклическим* для оператора A, если линейная оболочка векторов $\{A^n v\}_{n=0}^{\infty}$ плотна в H.

Лемма 9. *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в H с циклическим вектором v. Существует унитарный оператор $U : H \to L^2(\sigma(A), d\mu_v)$ такой, что*

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

для всех $f \in L^2(\sigma(A), d\mu_v)$ (равенство понимается в смысле L^2-функций).

Доказательство. Для непрерывных функций f определим отображение U по формуле

$$U\Phi(f)v = f,$$

т.е. как обратное к отображению Φ из теоремы 45 о функциональном исчислении для непрерывных функций (см. п. 5.1.1). Покажем, что отображение U тем самым корректно определено. Действительно,

$$\|\Phi(f)v\|^2 = (\Phi^*(f)\Phi(f)v, v) = (\Phi(\bar{f}f)v, v) = \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d\mu_v(\lambda).$$

Отсюда следует, что если $f = g$ почти всюду по мере μ_v, то $\Phi(f)v = \Phi(g)v$. Тем самым, отображение U корректно определено на множестве $\{\Phi(f)v : f \in C(\sigma(A))\}$ и сохраняет нормы. Так как вектор v цикличен, то замыкание указанного множества совпадает со всем H. Поэтому по теореме об ограниченном линейном отображении U продолжается до изометрического отображения $H \to L^2(\sigma(A), d\mu_v)$. Так как множество $C(\sigma(A))$ плотно в $L^2(\sigma(A), d\mu_v)$, то образ $\operatorname{Im} U$ совпадает с $L^2(\sigma(A), d\mu_v)$. Наконец, если $f \in C(\sigma(A))$, то

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = [UA\Phi(f)v](\lambda) = [U\Phi(\lambda f)v](\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

По непрерывности это соотношение сохраняется для всех $f \in L^2(\sigma(A), d\mu_v)$. □

Лемма 10. *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертово пространстве H. Тогда H допускает разложение в прямую сумму подпространств*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{N} H_n,$$

где N – либо натуральное число, либо $N = \infty$, а указанные подпространства H_n обладают следующими свойствами:

1. *каждое из подпространств H_n инвариантно относительно оператора A, т.е. $A : H_n \to H_n$;*

2. *для любого* $n = 1, \dots, N$ *существует вектор* $v_n \in H_n$*, который является циклическим вектором оператора* $A|H_n$*, т.е. множество векторов вида* $\{f(A)v_n : \ f \in C(\sigma(A))\}$ *плотно в* H_n*.*

Доказательство, которое заключается в применении леммы Цорна, оставляется в виде задачи.

Теорема 50 (спектральная теорема в терминах оператора умножения)**.** *Пусть* A *– ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H*. Тогда существуют меры* $\{\mu_n\}_{n=1}^N$*, где* N *– либо натуральное число, либо* $N = \infty$*, и унитарный оператор*

$$U : H \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

такие, что

$$(UAU^{-1}f)_n(\lambda) = \lambda f_n(\lambda)$$

для любых $f = (f_1, \dots, f_n) \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$*. Указанная реализация называется спектральным представлением оператора* A*.*

Теорема вытекает из лемм 9 и 10. Заметим, что меры μ_n, также называемые *спектральными*, определены неоднозначно.

Следствие 12. *Если* A *– ограниченный самосопряженный оператор в* H*, то существуют пространство* (M, μ) *с конечной мерой* μ*, ограниченная измеримая функция* F *на этом пространстве и унитарный оператор* $U : H \to L^2(M, d\mu)$ *такие, что*

$$(UAU^{-1}f)(x) = F(x)f(x)$$

(равенство понимается, как и выше, в смысле L^2*- функций).*

Доказательство. Выберем циклические векторы $v_n \in H_n$ так, чтобы $\|v\|_{H_n}^2 = 1/2^n$ и обозначим через M объединение N экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$:

$$M = \bigcup_{n=1}^{N} \mathbb{R}.$$

Определим меру μ на M условием: ее сужение на n-й экземпляр $\mathbb{R}$ есть μ_n, так что

$$\mu(M) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(\mathbb{R}).$$

По теореме Рисса–Маркова $\mu_n(\mathbb{R}) = \|v_n\|^2 = 1/2^n$, откуда следует, что $\mu(M) < \infty$. □

5.2.2 Примеры

Пример 23 (конечномерный случай)**.** Пусть A есть симметричная $n\times n$-матрица. Тогда она обладает ортонормированным базисом из собственных векторов $v_1,\dots,v_n$, так что $Av_j=\lambda_j v_j$, $j=1,\dots,n$. Предположим, что все собственные значения λ_j различны, и рассмотрим меру

$$\mu=\sum_{j=1}^{n}\delta(\lambda-\lambda_j),$$

составленную из дираковских мер на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда пространство $L^2(\mathbb{R},d\mu)$ относительно этой меры совпадает с $\mathbb{C}^n$, а любая функция $f\in L^2(\mathbb{R},d\mu)$ задается набором чисел $(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n))$. При этом функции λf будет отвечать набор $(\lambda_1 f(\lambda_1),\dots,\lambda_n f(\lambda_n))$, так что исходный оператор A реализуется в $L^2(\mathbb{R},d\mu)$ в виде оператора умножения на λ.

Если в качестве меры взять

$$\widetilde{\mu}=\sum_{n=1}^{n}\alpha_j\delta(\lambda-\lambda_j),$$

где α_j – произвольные положительные числа, то в пространстве $L^2(\mathbb{R},d\widetilde{\mu})$ оператор A будет действовать также как оператор умножения на λ, что демонстрирует неоднозначность выбора спектральной меры μ.

Пример 24. Пусть A – компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда по теореме Гильберта–Шмидта в H существует ортонормированный базис $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ из собственных векторов оператора A, так что $Av_n=\lambda_n v_n$, $j=1,\dots,\infty$. Если все собственные значения различны, то в качестве спектральной меры можно взять меру

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta(\lambda-\lambda_j)}{2^n}.$$

Пример 25. Пусть $H=\ell^2(\mathbb{Z})$, т.е. состоит из последовательностей $x=\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2<\infty$. Рассмотрим на H оператор левого сдвига S, действующий по формуле: $(Sx)_n=x_{n+1}$. Тогда сопряженный к нему оператор $T=S^*$ является правым сдвигом, т.е. $(Tx)_n=x_{n-1}$. Введем самосопряженный оператор $A=S+T$ и представим его в виде оператора умножения. Для этого рассмотрим отображение $U:H\to L^2(0,1)$, задаваемое формулой

$$U:x=\{x_n\}\longmapsto\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{2\pi it}.$$

Тогда USU^{-1} есть оператор умножения на функцию $e^{-2\pi it}$, а оператор UTU^{-1} есть оператор умножения на функцию $e^{2\pi it}$, так что UAU^{-1} есть оператор умножения на функцию $2\cos(2\pi t)$. Найдите меры μ_1 и μ_2 на прямой $\mathbb{R}$, для которых оператор A реализуется в виде оператора умножения на t в пространстве $L^2(\mathbb{R},d\mu_1)\oplus L^2(\mathbb{R},d\mu_2)$.

5.2.3 Дополнение: интерпретация спектра в терминах спектральных мер

Определение 48. *Носителем семейства мер* $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ называется дополнение до наибольшего открытого подмножества E, на котором $\mu_n(E) = 0$ для всех n.

Предложение 23. *Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ есть семейство спектральных мер для ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H. Тогда его спектр совпадает с носителем семейства $\{\mu_n\}$:*

$$\sigma(A) = \operatorname{supp}\{\mu_n\}.$$

Определение 49. Пусть F есть вещественнозначная функция на пространстве с мерой (M, μ). Число $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит *существенной области значений* функции F, если для любого $\epsilon > 0$ выполняется условие:

$$\mu\{x \in M : \ \lambda - \epsilon < F(x) < \lambda + \epsilon\} > 0.$$

Предложение 24. *Пусть F есть ограниченная измеримая вещественнозначная функция на пространстве с мерой (M, μ) и A_F – оператор умножения на функцию F в пространстве $L^2(M, d\mu)$, задаваемый формулой*

$$(A_F f)(x) = F(x) f(x).$$

Тогда его спектр $\sigma(A_F)$ совпадает с существенной областью значений функции F.

Обратимся теперь к тонкой классификации спектра, основанной на представлении спектральной меры μ в виде суммы (см. п. 2.3.3)

$$\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_s$$

атомарной меры μ_p, абсолютно непрерывной меры μ_{ac} и непрерывной сингулярной меры μ_s относительно меры Лебега.

Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и μ_v обозначает меру на спектре $\sigma(A)$, отвечающую вектору $v \in H$ по теореме Рисса–Маркова. Введем подпространства

$$\begin{aligned} H_p &= \{v \in H : \ \mu_v - \text{атомарная мера}\}, \\ H_{ac} &= \{v \in H : \ \mu_v - \text{мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега}\}, \\ H_s &= \{v \in H : \ \mu_v - \text{непрерывная мера, сингулярная относительно меры Лебега}\}. \end{aligned}$$

Предложение 25. *В разложении $H = H_p \oplus H_{ac} \oplus H_s$ каждое из слагаемых подпространств инвариантно относительно оператора A. При этом сужение $A|H_p$ оператора A на подпространство H_p имеет полную ортогональную систему собственных векторов, все спектральные меры сужения $A|H_{ac}$ оператора A на подпространство H_{ac} абсолютно непрерывны, а спектральные меры сужения $A|H_s$ оператора A на подпространство H_s сингулярны.*

Определение 50 (тонкая классификация спектра)**.** Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Введем следующие подмножества спектра:

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) :\ \lambda \text{ есть собственное значение } A\},\\ \sigma_{ac}(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) :\ \lambda \in \sigma(A|H_{ac})\},\\ \sigma_s(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) :\ \lambda \in \sigma(A|H_s)\}.\end{aligned}$$

Введенные подмножества называются соответственно *точечным*, *абсолютно непрерывным* и *сингулярным спектрами* оператора A. Объединение $\sigma_c(A) := \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_s(A)$ называется *непрерывным спектром* оператора A.

Предложение 26. $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_c(A)$.

5.2.4 Дополнение: операторы с простым спектром

Определение 51. Ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H называется *оператором с простым спектром*, если он унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ для некоторой меры μ.

Предложение 27. *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A имеет простой спектр тогда и только тогда, когда он обладает циклическим вектором.*

В конечномерном случае операторы с простым спектром — это в точности операторы с различными собственными значениями. Отвечающие им спектральные меры имеют вид

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \delta(\lambda - \lambda_n).$$

Предположим, что на прямой $\mathbb{R}$ задана мера μ и F – измеримая неотрицательная функция, почти всюду отличная от нуля, которая принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, d\mu)$. Последнее означает, что $\int_C |F| d\mu < \infty$ для любого компактного подмножества $C \subset \mathbb{R}$. Тогда $d\nu = F d\mu$ есть борелевская мера на прямой $\mathbb{R}$ и отображение $U : L^2(\mathbb{R}, d\nu) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, которое задается формулой

$$(Uf)(\lambda) = \sqrt{F(\lambda)} f(\lambda),$$

унитарно и удовлетворяет соотношению $\lambda(Uf)(\lambda) = U(\lambda f)$. Следовательно, оператор A, имеющий спектральную меру μ, допускает спектральное представление и с мерой ν. По теореме Радона–Никодима равенство $d\nu = F d\mu$, где F – функция, почти всюду отличная от нуля, выполняется тогда и только тогда, когда меры μ и ν имеют одинаковые множества нулевой меры. Такие меры естественно считать *эквивалентными*.

Предложение 28. *Пусть μ и ν – борелевские меры на $\mathbb{R}$ с ограниченными носителями. Обозначим через A_μ оператор умножения на λ в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, а через A_ν оператор умножения на λ в пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$. Тогда операторы A_μ и A_ν унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда меры μ и ν эквивалентны.*

5.3 Лекция XIX. Спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер

5.3.1 Спектральные проекторы

Определение 52. Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, а E – борелевское подмножество на прямой $\mathbb{R}$. Оператор $P_E := \chi_E(A)$ называется *спектральным проектором* оператора A, отвечающим множеству E.

Предложение 29. *Семейство $\{P_E\}$ спектральных проекторов ограниченного самосопряженного оператора A обладает следующими свойствами:*

1. *каждый оператор P_E является ортогональным проектором;*
2. $P_\emptyset = 0$.

   Обозначим через P_λ проектор $P_\lambda \equiv P_{(-\infty,\lambda)}$ с $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда
3. *существуют такие вещественные числа $a < b$, что $P_\lambda = 0$ при $\lambda \leq a$ и $P_\lambda = I$ при $\lambda \geq b$;*
4. *$P_\lambda \leq P_\mu$ при $\lambda \leq \mu$;*
5. *если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, причем $E_m \cap E_n = \emptyset$ при $m \neq n$, то*
$$P_E = s\text{-}lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} P_{E_n}\right);$$
6. *$P_{E_1}P_{E_2} = P_{E_1\cap E_2}$ и $P_{E_1\cup E_2} = P_{E_1} + P_{E_2}$, если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.*

Доказательство этих утверждений оставляем в качестве задачи.

Определение 53. Семейство проекторов $\{P_E\}$, где E – борелевское подмножество в $\mathbb{R}$, действующих в гильбертовом пространстве H и обладающих свойствами (1)–(6), будем называть *проекторнозначной мерой* на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ со значениями в H или *операторным разложением единицы*.

Замечание 18. Из условия (6) предыдущего предложения следует, что функция $E \mapsto P_E$ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ является конечно-аддитивной. Однако нет оснований ожидать, что она будет и счетно-аддитивной по отношению к равномерной норме. Действительно, счетная аддитивность этой функции означала бы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_{E_n}$, построенный по набору $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ борелевских подмножеств $E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ с $E_m \cap E_n = \emptyset$ при $m \neq n$, сходится по операторной норме. Но норма проектора P_E равна либо нулю,либо больше 1, поэтому такой ряд может сходиться только в случае, если отлично от нуля лишь конечное число его членов.

Тем не менее, условие (5) указывает, что для функции $E \mapsto P_E$ имеет место счетная аддитивность в сильном смысле.

Приведенное определение проекторнозначной меры можно обобщить на следующую ситуацию. Пусть M есть множество, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{R}$. Назовем *проекторнозначной мерой* на $\mathcal{R}$ *со значениями в гильбертовом пространстве* H отображение P, сопоставляющее каждому измеримому множеству $E \in \mathcal{R}$ проектор P_E в пространстве H, которое обладает следующими свойствами:

1. каждый оператор P_E является ортогональным проектором;

2. $P_\emptyset = 0$, $P_M = I$;

3. $P_{E_1}P_{E_2} = P_{E_1 \cap E_2}$ и $P_{E_1 \cup E_2} = P_{E_1} + P_{E_2}$, если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

4. для любых векторов $u, v \in H$ отображение $E \mapsto (P_E u, v)$ задает комплекснозначную меру на $\mathcal{R}$.

Замечание 19. Если P – проекторнозначная мера на $\mathcal{R}$ со значениями в гильбертовом пространстве H, то для любого вектора $v \in H$ отображение $E \mapsto P_E v$ задает счетно-аддитивную H-значную меру на $\mathcal{R}$.

5.3.2 Спектральная теорема

Пусть $\{P_E\}$ есть проекторнозначная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда для любого $v \in H$ скалярная монотонно неубывающая функция $(P_\lambda v, v)$ определяет обычную меру Лебега–Стилтьеса $d(P_\lambda v, v)$ на вещественной оси. Для произвольных $u, v \in H$ функция $(P_\lambda u, v)$ задает комплексную меру $d(P_\lambda u, v)$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 51. *Пусть $\{P_E\}$ есть проекторнозначная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда отображение*

$$\Psi : L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow B(H),$$

определяемое формулой

$$\Psi(f)U, v) = \int f(\lambda) d(P_\lambda u, v), \tag{5.1}$$

задает изометрический изоморфизм алгебры $L^\infty(\mathbb{R})$ в алгебру $B(H)$ ограниченных линейных операторов в H. Это отображение обладает следующими свойствами:

$$\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^* \tag{5.2}$$

и

$$\|\Psi(f)v\|^2 = \int |f|^2 d(P_\lambda v, v). \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть сначала f есть простая функция, определенная на носителе меры P_E, иначе говоря, задано разбиение $\operatorname{supp}(P_E)$ на борелевские подмножества $E_1, \dots, E_n$ так, что f принимает значение c_k на множестве E_k и

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k},$$

где χ_E – характеристическая функция множества E. Определим оператор $\Psi(f) \in B(H)$, полагая

$$\Psi(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_{E_k}.$$

Тогда

$$\Psi(f)^* = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k P_{E_k} = \Psi(\bar{f}).$$

Если $F_1, \ldots, F_m$ – другое разбиение носителя $\operatorname{supp}(P_E)$ на непересекающиеся борелевские подмножества и g – простая функция, принимающая значение d_l на множестве F_l, то

$$\Psi(f)\Psi(g) = \sum_{k,l} c_k d_l P_{E_k} P_{F_l} = \sum_{k,l} c_k d_l P_{E_k \cap F_l}. \tag{5.4}$$

Так как произведение fg снова является простой функцией, принимающей значение $c_k d_l$ на множестве $E_k \cap F_l$, то из последнего соотношения следует, что

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg). \tag{5.5}$$

Точно также проверяется, что

$$\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Psi(f) + \mu \Psi(g). \tag{5.6}$$

Для произвольных векторов $u, v \in H$ имеем

$$(\Psi(f)u, v) = \sum_{k=1}^{n} (P_{E_k} u, v) = \int f(\lambda) d(P_\lambda u, v). \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$\Psi(f)^* \Psi(f) = \Psi(\bar{f})\Psi(f) = \Psi(\bar{f} f) = \Psi(|f|^2).$$

Следовательно,

$$\|\Psi(f)v\|^2 = (\Psi(f)^* \Psi(f)v, v) = (\Psi(|f|^2)v, v) = \int |f(\lambda)|^2 d(P_\lambda v, v),$$

откуда

$$\|\Psi(f)v\|^2 \leq \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \int d(P_\lambda v, v) = \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v\|^2.$$

Теперь если выбрать номер k так, чтобы $|c_k| = \|f\|^2_{L^\infty}$, то при $v \in \operatorname{Im} P_{E_k}$ будем иметь

$$\Psi(f)v = c_k P_{E_k} v = c_k v,$$

откуда следует равенство

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|^2_{L^\infty}. \tag{5.8}$$

Пусть теперь f – произвольная функция из $L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда существует последовательность простых измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая сходится к f по норме $L^\infty(\mathbb{R})$. Из формулы (5.8) вытекает, что соответствующая последовательность операторов $\{\Psi(f_n)\}_{n=1}^\infty$ является последовательностью Коши в

пространстве $B(H)$. Поэтому она сходится к некоторому оператору в $B(H)$, обозначаемому через $\Psi(f)$. Этот оператор, как легко видеть, не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$, при этом, согласно (5.8), $\|\Psi(f)\| = \|f\|^2_{L^\infty}$.

Формула (5.1) для $\Psi(f)$, а также формулы (5.2) и (5.3) доказываются, исходя из соответствующих утверждений для простых функций с помощью аппроксимации. Аналогичным образом, переносятся на произвольные функции $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$ свойства (5.5) и (5.6).

Тем самым, отображение Ψ устанавливает изометрический изоморфизм алгебры $L^\infty(\mathbb{R})$ в алгебру $B(H)$, причем его образ $\Psi(L^\infty(\mathbb{R}))$ является замкнутой подалгеброй в $B(H)$. □

Формулу (5.1) принято записывать коротко в виде

$$\Psi(f) = \int f(\lambda) dP_\lambda.$$

В частном случае, когда $\{P_E = P_E(A)\}$ есть проекторнозначная мера, отвечающая самосопряженному оператору A, будем иметь

$$\Psi(f) = f(A) = \int f(\lambda) dP_\lambda \quad \text{и} \quad A = \int \lambda dP_\lambda.$$

Суммируя сказанное выше, получаем следующую теорему

Теорема 52. *Существует взаимно-однозначное соответствие между ограниченными самосопряженными операторами A и проекторнозначными мерами $\{P_E\}$ на прямой, задаваемое формулами*

$$A \longmapsto \{P_E = \chi_E(A)\}$$

и

$$\{P_E\} \longmapsto A = \int \lambda dP_\lambda.$$

5.3.3 Дополнение: спектральные проекторы и спектр

Предложение 30. *Точка λ принадлежит спектру самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда ее спектральный проектор удовлетворяет условию:*

$$P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A) \neq 0$$

для любого $\epsilon > 0$. Иными словами, λ есть точка роста проекторнозначной меры $\{dP_\lambda\}$.

Определение 54. Точка λ принадлежит *существенному спектру* $\sigma_{\text{ess}}(A)$ оператора A, если проектор $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)$ бесконечномерен для любого $\epsilon > 0$. Если для некоторого $\epsilon > 0$ проектор $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}(A)$ конечномерен, то говорят, что λ принадлежит *дискретному спектру* $\sigma_{\text{disc}}(A)$ оператора A.

Предложение 31. *Существенный спектр $\sigma_{ess}(A)$ самосопряженного оператора A всегда замкнут в отличие от дискретного спектра $\sigma_{disc}(A)$.*

Предложение 32. *Точка λ принадлежит дискретному спектру самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *λ есть изолированная точка спектра;*

2. *λ есть собственное значение конечной кратности.*

Предложение 33. *Точка λ принадлежит существенному спектру самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. *λ принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_s(A)$ оператора A;*

2. *λ – предельная точка точечного спектра $\sigma_p(A)$;*

3. *λ – собственное значение бесконечной кратности.*

Теорема 53 (критерий Вейля)**.** *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Точка λ принадлежит существенному спектру $\sigma_{ess}(A)$ оператора A тогда и только тогда, когда существует ортонормированная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ векторов из H, для которой*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)u_n\| = 0.$$

5.3.4 Дополнение: спектральная теорема для нормальных операторов

Определение 55. Оператор $T \in B(H)$ называется *нормальным*, если

$$TT^* = T^*T.$$

Нормальные операторы обладают следующими свойствами.

Предложение 34. *Пусть T есть ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1. *оператор T является нормальным тогда и только тогда, когда $\|Tu\| = \|T^*u\|$ для любого $u \in H$;*

2. *для нормального оператора T выполняется соотношение*

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp};$$

3. *если λ есть собственное значение нормального оператора T, т.е. $Tu = \lambda u$ для некоторого $u \in H \setminus 0$, то $T^*u = \overline{\lambda} u$;*

4. *если λ, μ – различные собственные значения нормального оператора T, то отвечающие им собственные подпространства ортогональны;*

5. *для нормального оператора справедливы соотношения*

$$\|T^2\| = \|T\|^2 \quad \text{и} \quad r(A) = \|T\|.$$

Очевидно, что класс нормальных операторов содержит самосопряженные и унитарные операторы. В качестве еще одного примера заметим, что оператор умножения на ограниченную функцию в пространстве $L^2(M,\mu)$ всегда нормален. Самосопряженные и унитарные операторы выделяются среди остальных нормальных операторов расположением своих спектров согласно следующему предложению.

Предложение 35. *Нормальный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда его спектр лежит на вещественной оси. Нормальный оператор унитарен тогда и только тогда, когда его спектр лежит на единичной окружности.*

Теперь сформулируем спектральную теорему для нормальных операторов.

Теорема 54 (спектральная теорема в терминах оператора умножения)**.** *Пусть T – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существуют пространство (M,μ) с конечной мерой μ, унитарный оператор $U : H \to L^2(M,\mu)$ и ограниченная борелевская функция F на M такие, что*

$$(UTU^{-1}f)(x) = F(x)f(x)$$

для почти всех $x \in M$ и любой $f \in L^2(M,\mu)$.

Теорема 55 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер)**.** *Пусть T – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует единственная проекторнозначная мера $\{P_E\}$ на прямой такая, что*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP_\lambda.$$

Также, как в п. 5.3.1 доказывается

Теорема 56 (теорема о функциональном исчислении для нормальных операторов)**.** *Пусть $\{P_E\}$ – спектральное разложение нормального оператора T, действующего в гильбертовом пространстве H и f – ограниченная борелевская функция на его спектре $\sigma(T)$. Обозначим через $f(T)$ оператор*

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dP_\lambda.$$

Тогда отображение $f \mapsto f(T)$ задает гомоморфизм Ψ алгебры $L^\infty(\sigma(T))$ в алгебру $B(H)$, который удовлетворяет условиям

$$\overline{f}(T) = f(T)^* \quad \text{и} \quad \|f(T)\| \le \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Образ $\Psi(L^\infty(\sigma(T)))$ в алгебре $B(H)$ является замкнутой подалгеброй в $B(H)$.

Краткое содержание и библиографические указания к главе 5

Глава посвящена спектральной теореме для ограниченных самосопряженных операторов. Она открывается лекцией 5.1, в которой приводится фундаментальная теорема о функциональном исчислении в классе непрерывных функций. Ее доказательство, в изложении которого мы следуем [7], гл.VII, п.1, основано на важной теореме Стоуна–Вейерштрасса из теории коммутативных банаховых алгебр. Доказательство теоремы Стоуна–Вейерштрасса можно найти в [7], дополнение к п.IV.3. Отступление в п.5.1.2 посвящено борелевским мерам и теореме Рисса–Маркова, доказательство которой можно найти, например, в книге [11], гл.IV, п.5. Использование этой теоремы позволяет распространить теорему о функциональном исчислении на случай ограниченных функций.

В лекции 5.2 доказывается спектральная теорема в терминах оператора умножения. В ее изложении мы следуем [7], гл.VII, п.2. Доказательство основано на двух леммах, первая из которых представляет собой вариант спектральной теоремы для операторов, обладающих циклическим вектором, а вторая дает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств таких, что ограничение оператора на любое из этих подпространств обладает циклическим вектором. Далее следуют два дополнения. В первом дается описание спектра оператора умножения на функцию как существенной области значений этой функции (доказательство этого утверждения можно найти в книге [9], п.13.27). Приводится также тонкая классификация спектра, основанная на теореме Лебега о разложении борелевской меры на компоненты. Во втором дополнении дается интерпретация операторов, обладающих циклическим вектором, как операторов с простым спектром. Подробное обсуждение операторов, обладающих циклическими векторами, можно найти в [12], гл.6, п.7.

В лекции 5.3 доказывается спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер. В ее изложении мы следуем [9], п.12.21. Дополнение 5.3.3 посвящено интерпретации спектра в терминах спектральных мер. В частности, приводится критерий Вейля, дающий описание существенного спектра оператора. Доказательство этого критерия можно найти в [8], гл.IX, п.133. В следующем дополнении 5.3.4 приводится спектральная теорема для нормальных операторов, доказательство которой можно найти в [9], п.12.22.

Глава 6

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

6.1 Лекция XX. Основные определения

6.1.1 Область определения, график и замыкания

Под неограниченным оператором мы понимаем линейный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, областью определения которого является подпространство $D(T)$ в H, а множеством значений – подпространство $\operatorname{Im} T \subset H$. Как правило, будет предполагаться, что область определения $D(T)$ плотна в H.

Пример 26. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$ и $D(T)$ есть подпространство функций $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |\varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

Опеределим оператор T на множестве $D(T)$ равенством

$$(T\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Этот оператор неограничен в H, но корректно определен на подпространстве $D(T)$.

Пример 27. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$ и $D(T) = S(\mathbb{R})$ есть пространство Шварца быстро убывающих функций на прямой, состоящее из функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^M \frac{d^N}{dt^N} \varphi(t) \right| < \infty$$

для всех $M, N \in \mathbb{Z}_+$. Определим оператор T равенством

$$(T\varphi)(t) = -\varphi''(t) + t^2 \varphi(t).$$

Оператор T корректно определен на подпространстве $S(\mathbb{R})$. Функции Эрмита

$$\varphi_n(t) = c_n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2},$$

где $c_n = (-1)^n \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}$ – нормировочные константы, принадлежат $S(\mathbb{R})$ и образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Они являются собственными функциями оператора T:

$$(T\varphi_n)(t) = (2n+1)\varphi_n(t)$$

с собственными значениями, растущими с ростом n. Поэтому оператор T неограничен в $L^2(\mathbb{R})$.

Определение 56. *Графиком* линейного оператора T называется множество

$$\Gamma(T) = \{(u, Tu) : \ u \in D(T)\},$$

которое является линейным подпространством в $H \times H$. Оператор T называется *замкнутым*, если его график $\Gamma(T)$ является замкнутым подпространством в $H \times H$.

По теореме о замкнутом графике оператор T ограничен, если он замкнут и его область определения $D(T)$ совпадает со всем пространством H.

Определение 57. Пусть S и T – линейные операторы в H. Будем говорить, что оператор S является *расширением* оператора T (обозначение: $T \subset S$), если $D(T) \subset D(S)$ и $Tv = Sv$ для всех $v \in D(T)$. Это условие эквивалентно тому, что $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$.

Определение 58. Оператор T *допускает замыкание*, если он имеет замкнутое расширение. В этом случае существует наименьшее замкнутое расширение оператора T, которое называется *замыканием* T и обозначается через $\overline{T}$.

Предложение 36. *Если оператор T допускает замыкание, то*

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}.$$

Прежде, чем переходить к доказательству предложения, заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Предположим, что S – замкнутое расширение оператора T, т.е. $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Введем оператор R, областью определения которого является множество

$$D(R) = \{u \in H : \ (u,v) \in \overline{\Gamma(T)} \text{ для некоторого } v \in H\},$$

а сам оператор задается формулой: $v := Ru$. Это определение корректно. Действительно, если условие $(u,v) \in \overline{\Gamma(T)}$ выполняется одновременно для двух разных $v_1, v_2 \in H$, то, полагая $v := v_1 - v_2$, получим, что вектор $(0,v) \in \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Что возможно только при $v = 0$. Поскольку $\Gamma(R) = \overline{\Gamma(T)}$, то R является замкнутым расширением T. Ввиду произвольности S отсюда следует, что $R \subset S$ для любого замкнутого расширения S, т.е. R – замыкание T. □

К обычным операциям над неограниченными операторами нужно относиться с осторожностью, проверяя их корректную определенность. Например, область определения суммы двух неограниченных операторов S и T есть $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$, так что

$$(S+T)u = Su + Tu \quad \text{при } u \in D(S+T).$$

Аналогично, $D(ST) = \{u \in D(T) : \ Tu \in D(S)\}$ и

$$(ST)u = S(Tu) \quad \text{при } u \in D(ST).$$

6.1.2 Сопряженный оператор

Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда естественно ввести область определения $D(T^*)$ как подпространство, состоящее из тех $v \in H$, для которых линейный функционал (Tu, v) непрерывен по $u \in D(T)$. Если вектор v обладает этим свойством, то по теореме Хана–Банаха функционал (Tu, v) продолжается до непрерывного линейного функционала на H, который по теореме Рисса представляется в виде

$$(Tu, v) = (u, f) \tag{6.1}$$

для некоторого вектора $f \in H$. Условие непрерывности функционала (Tu, v) на $D(T)$ можно записать в виде неравенства

$$|(Tu, v)| \leq C\|u\|,$$

которое должно выполняться для всех $u \in D(T)$. Заметим, что вектор f в формуле (6.1) определяется единственным образом только при условии плотности области определения $D(T)$ в H.

Теперь мы готовы дать следующее

Определение 59. Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Обозначим через $D(T^*)$ подпространство в H, состоящее из всех векторов $v \in H$, для которых существует вектор $f \in H$ такой, что

$$(Tu, v) = (u, f) \quad \text{для всех } u \in D(T).$$

Определим *оператор* T^**, сопряженный к оператору* T, по формуле: $T^*v = f$.

Заметим, что область определения сопряженного оператора $D(T^*)$ вполне может оказаться неплотной в H. Приведем пример, демонстрирующий подобное явление.

Пример 28. Пусть f – ограниченная измеримая функция на вещественной оси $\mathbb{R}$, не принадлежащая $L^2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$D(T) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \int |f(t)\varphi(t)|dt < \infty\}.$$

Тогда $D(T)$ содержит, в частности, все функции из $L^2(\mathbb{R})$ с компактными носителями, поэтому $D(T)$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$.

Фиксируем произвольную функцию $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ и рассмотрим оператор

$$T\varphi = (\varphi, f)\varphi_0 \quad \text{для } \varphi \in D(T).$$

Тогда для функций $\psi \in D(T^*)$ будем иметь

$$(\varphi, T^*\psi) = (T\varphi, \psi) = ((\varphi, f)\varphi_0, \psi) = (\varphi, f)(\varphi_0, \psi) = (\varphi, (\psi, \varphi_0)f)$$

для всех $\varphi \in D(T)$. Тем самым, $T^*\psi = (\psi, \varphi_0)f$. Так как функция f не принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то оператор T^* корректно определен только на векторах ψ с $(\psi, \varphi_0) = 0$, т.е. область определения $D(T^*)$ ортогональна φ_0 и заведомо не плотна в H. На самом деле, она совпадает с ортогональным дополнением к φ_0, а оператор T^* на этой области равен нулю.

Имеются примеры, в которых $D(T^*) = \{0\}$.

В том случае, когда область определения $D(T^*)$ плотна в H, можно ввести оператор $T^{**} := (T^*)^*$. В его терминах можно описать замыкание оператора T.

Предложение 37. *Пусть T – линейный оператор в H с плотной областью определения $D(T)$. Тогда:*

1. *оператор T^* замкнут;*

2. *оператор T допускает замыкание тогда и только тогда, когда область определения $D(T^*)$ плотна в H; в этом случае $\overline{T} = T^{**}$;*

3. *если оператор T допускает замыкание, то $(\overline{T})^* = T^*$.*

Доказательство. Введем на пространстве $H \times H$ унитарный оператор V по формуле

$$V(u, v) = -(v, u)$$

и докажем *первое утверждение* предложения. Из унитарности оператора V следует, что

$$V(E^\perp) = V(E)^\perp$$

для любого подпространства $E \subset H \times H$ (проверьте!). Поэтому для $(u, v) \in H \times H$ будем иметь

$$(u, v) \in V(\Gamma(T)^\perp) \Longleftrightarrow (u, v) \perp V(\Gamma(T)),$$

т.е.

$$((u, v), (-Tw, w)) = 0 \tag{6.2}$$

для всех $w \in D(T)$. Учитывая, что скалярное произведение на $H \times H$ задается формулой

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

получим из соотношения (6.2), что

$$(u, Tw) = (v, w) \quad \text{для всех } w \in D(T). \tag{6.3}$$

Итак, условие $(u, v) \perp V(\Gamma(T))$ равносильно соотношению (6.3), которое означает, что $(u, v) \in \Gamma(T^*)$. Тем самым,

$$\Gamma(T^*) = V(\Gamma(T))^\perp.$$

Отсюда следует, что график $\Gamma(T^*)$ замкнут, будучи ортогональным дополнением к линейному подпространству.

Докажем *второе утверждение* предложения. Пользуясь тем, что график $\Gamma(T)$ является линейным подпространством в $H \times H$, получим

$$\overline{\Gamma(T)} = \left(\Gamma(T)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V^2\Gamma(T)^{\perp}\right)^{\perp}$$
$$= \left(V(V\Gamma(T))^{\perp}\right)^{\perp} \text{ (как показано выше)} = \ (V\Gamma(T^*))^{\perp}.$$

Если область определения $D(T^*)$ плотна, то можно ввести оператор T^{**}, график которого, как показано в первом пункте доказательства, есть

$$\Gamma(T^{**}) = V(\Gamma(T^*))^{\perp} = \overline{\Gamma(T)},$$

откуда следует, что оператор T допускает замыкание и $\overline{T} = T^{**}$.

Допустим, напротив, что область определения $D(T^*)$ не плотна в H и выберем вектор $v \neq 0$, ортогональный $D(T^*)$. Это означает, иными словами, что $(0, v) \in \Gamma(T^*)^{\perp}$, т.е. подпространство $\Gamma(T^*)^{\perp} = V(\Gamma(T^*)^{\perp})$ не может быть графиком никакого линейного оператора. Поскольку $\overline{\Gamma(T)} = (V(\Gamma(T^*))^{\perp}$, то это означает, что оператор T не допускает замыкания.

Для доказательства *третьего утверждения* заметим, что если оператор T допускает замыкание, то

$$T^* = \overline{T^*} = T^{***} = (\overline{T})^*.$$

□

Докажем еще одно свойство, относящееся к сопряжению произведения неограниченных операторов с плотными областями определения.

Предложение 38. *Пусть S, T и ST – линейные операторы в H с плотными областями определения. Тогда*

$$(T^*S^*) \subset (ST)^*.$$

Если оператор S ограничен, то $T^*S^* = (ST)^*$.

Доказательство. Пусть $u \in D(ST)$ и $v \in D(T^*S^*)$. Тогда

$$(Tu, S^*v) = (u, T^*S^*v),$$

поскольку $u \in D(T)$ и $S^*v \in D(T^*)$. Кроме того,

$$(STU, v) = (Tu, S^*v),$$

поскольку $Tu \in D(S)$ и $v \in D(S^*)$. Поэтому

$$(STu, v) = (u, T^*S^*v),$$

откуда следует первое утверждение предложения.

Если оператор S ограничен, то его сопряженный S^* также ограничен и $D(S^*) = H$. Поэтому если $v \in D((ST)^*)$, то

$$(Tu, S^*v) = (STu, v) = (u, (ST)^*v)$$

для всех $u \in D(ST)$. Следовательно, $S^*v \in D(T^*)$ и потому $v \in D(T^*S^*)$. Таким образом, $D((ST)^*) \subset D(T^*S^*)$, откуда, с учетом первого утверждения предложения, вытекает и его второе утверждение. □

6.1.3 Резольвента и спектр

Определение 60. Пусть T – замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H. Комплексное число λ принадлежит *резольвентному множеству* $\rho(T)$, если оператор $\lambda I - T$ является биекцией $D(T) \to H$ с ограниченным обратным оператором. При $\lambda \in \rho(T)$ оператор

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

называется *резольвентой* оператора T в точке λ. Дополнение к $\rho(T)$ называется *спектром* $\sigma(T)$ оператора T.

Замечание 20. Определения точечного и остаточного спектра, данные выше для ограниченных операторов, переносятся на случай неограниченных операторов без изменений.

Теорема 57 (теорема о резольвенте). *Пусть T – замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Тогда $\rho(T)$ есть открытое подмножество комплексной плоскости, на котором резольвента является аналитической операторной функцией. Более того, семейство операторов $\{R_\lambda(T) : \ \lambda \in \rho(T)\}$ состоит из попарно коммутирующих ограниченных операторов, удовлетворяющих соотношению*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы о резольвенте для ограниченных операторов. □

Прежде, чем привести пример вычисления резольвенты неограниченного оператора, напомним определение абсолютно непрерывных функций.

Отступление: абсолютно непрерывные функции

Функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, абсолютно непрерывна на этом отрезке, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой системы непересекающихся интервалов (a_k, b_k), $k = 1, \ldots, N$, принадлежащих отрезку $[a, b]$ и имеющих суммарную длину

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta,$$

выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{N} |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)| < \epsilon.$$

Всякая такая функция равномерно непрерывна на $[a, b]$ и представляется в виде неопределенного интеграла от суммируемой функции. Тем самым, производная абсолютно непрерывной функции суммируема на $[a, b]$.

Пример 29. Пусть AC$[0,1]$ есть множество абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, производные которых принадлежат $L^2(0,1)$. Пусть S и T обозначают операторы $i\frac{d}{dt}$ с областями определения соответственно

$$D(S) = \{\varphi : \ \varphi \in \mathrm{AC}[0,1]\},$$
$$D(T) = \{\varphi : \ \varphi \in \mathrm{AC}[0,1], \ \varphi(0) = 0\}.$$

Обе области определения плотны в $L^2(0,1)$, а сами операторы замкнуты. Однако спектр S совпадает со всей комплексной плоскостью, а спектр T пуст.

Чтобы убедиться в том, что $\sigma(S) = \mathbb{C}$, заметим, что $(\lambda I - S)e^{-i\lambda t} = 0$ и $e^{-i\lambda t} \in D(S)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Покажем далее, что $\rho(T) = \mathbb{C}$. Для этого заметим, что оператор

$$(R_\lambda\varphi)(t) := i\int_0^1 e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds$$

при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет соотношениям

$$(\lambda I - T)R_\lambda = I, \quad R_\lambda(\lambda I - T) = I$$

на $D(T)$. Более того, нетрудно проверить, что оператор R_λ ограничен в $L^2(0,1)$, т.е. совпадает с резольвентой $R_\lambda(T)$ оператора T. Тем самым, $\rho(T) = \mathbb{C}$ и спектр $\sigma(T)$ пуст.

6.1.4 Симметрические и самосопряженные операторы

Определение 61. Линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим*, если $T \subset T^*$, т.е. $D(T) \subset D(T^*)$ и $Tu = T^*u$ для всех $u \in D(T)$. Отсюда следует, что

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \text{для всех } u, v \in D(T).$$

Оператор T называется *самосопряженным*, если $T = T^*$, т.е. T – симметрический и $D(T) = D(T^*)$.

Симметрические операторы всегда допускают замыкание, поскольку $D(T^*) \supset D(T)$ и, следовательно, область определения $D(T^*)$ плотна в H. Если T симметричен, то оператор T^* является замкнутым расширением T, поэтому замыкание $\overline{T}$, совпадающее с T^{**}, должно содержатся в T^*, т.е. для симметрического оператора T имеют место включения

$$T \subset T^{**} \subset T^*,$$

а для замкнутого симметрического оператора – соотношение

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

Для самосопряженного оператора T все указанные расширения совпадают, т.е. $T = T^{**} = T^*$.

Самосопряженные операторы в классе всех симметрических операторов можно охарактеризовать следующим свойством.

Определение 62. Симметрический оператор T в гильбертовом пространстве H называется *максимальным симметрическим*, если любое его симметрическое расширение S совпадает с T. Иначе говоря, если S симметричен и $S \supset T$, то $S = T$.

Предложение 39. *Самосопряженные операторы являются максимальными симметрическими операторами.*

Доказательство. Пусть оператор T самосопряжен и S – его симметрическое расширение, т.е. $S \subset S^*$ и $T \subset S$. Тогда $S^* \subset T^*$, откуда $S \subset S^* \subset T^*$. Но $T^* = T \subset S$, поэтому $S = T$. □

Теорема 58 (критерий самосопряженности)**.** *Пусть T – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *оператор T самосопряжен;*
2. *оператор T замкнут и ядро* $\operatorname{Ker}(T^* \pm iI) = 0$*;*
3. *образ* $\operatorname{Im}(T \pm iI) = 0$ *замкнут и совпадает с H.*

Доказательство. Докажем сначала импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2). Предположим, что T – самосопряженный оператор и существует вектор $u \in D(T^*) = D(T)$ такой, что $T^*u = iu$. Тогда также $Tu = iu$ и

$$i(u, u) = (iu, u) = (Tu, u) = (u, T^*u) = (u, Tu) = -i(u, u),$$

откуда $u = 0$. Аналогичным образом доказывается, что уравнение $T^*u = -iu$ не имеет ненулевых решений.

Перейдем к импликации (2) $\Longrightarrow$ (3). Так как уравнение $T^*u = -iu$ не имеет ненулевых решений, то множество $\operatorname{Im}(T - iI)$ должно быть плотно в H. Действительно, иначе существовал бы ненулевой вектор $v \in \operatorname{Im}(T - iI)^{\perp}$, удовлетворяющий соотношению

$$((T - iI)u, v) = 0 \quad \text{для всех } u \in D(T),$$

откуда следовало бы, что $v \in D\left[(T - iI)^*\right]$ и

$$(T - iI)^*v = (T^* + iI)v = 0.$$

Последнее невозможно, поскольку уравнение $(T^*+iI)v = 0$ по условию не имеет ненулевых решений.

Зная, что подпространство $\operatorname{Im}(T-iI)$ плотно в H, для доказательства утверждения (3) нужно показать, что это подпространство замкнуто в H. Но при любом $u \in D(T)$ справедливо соотношение

$$\|(T - iI)u\|^2 = \|u\|^2 + \|Tu\|^2 + (iu, Tu) + (Tu, iu) = \|u\|^2 + \|Tu\|^2 \tag{6.4}$$

в силу симметричности T. Поэтому если последовательность $u_n \in D(T)$ обладает тем свойством, что $(T - iI)u_n \to v$, то последовательности $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ также сходятся. Из замкнутости T вытекает, что в этом случае $u_n \to u$ для

некоторого вектора $u \in D(T)$ и $(T - iI)u = v$, т.е. подпространство $\mathrm{Im}(T - iI)$ замкнуто в H. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Im}(T + iI) = H$.

Импликация (3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $u \in D(T^*)$. Так как $\mathrm{Im}(T - iI) = H$, то найдется вектор $v \in D(T)$ такой, что

$$(T - iI)v = (T^* - iI)u.$$

Но $D(T) \subset D(T^*)$, поэтому $u - v \in D(T^*)$ и

$$(T^* - iI)(u - v) = 0.$$

Так как $\mathrm{Im}(T + iI) = H$, то $\mathrm{Ker}(T^* - iI) = \{0\}$, откуда $u = v \in D(T)$. Тем самым, мы показали, что $D(T^*) \subset D(T) \Longrightarrow D(T^*) = D(T)$, т.е. T самосопряжен. □

Определение 63. Симметрический оператор T называется *существенно самосопряженным*, если его замыкание $\overline{T}$ самосопряжено. Если оператор T замкнут, то подпространство D в области определения $D(T)$ называется *существенной областью определения* оператора T, если замыкание ограничения $T|D$ оператора T на подпространство D совпадает с T, т.е. $\overline{T|D} = T$.

Замечание 21. Если оператор T существенно самосопряжен, то он имеет единственное самосопряженное расширение. Действительно, предположим, что оператор S является самосопряженным расширением T. Тогда из включения $S \supset T$ следует, что $S \supset T^{**}$. Отсюда $S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}$, поскольку $T^{**} = \overline{T}$ самосопряжен. Тем самым, $S = T^{**}$ – единственное самопряженное расширение T. Справедливо и обратное утверждение: если оператор T имеет единственное самосопряженное расширение, то он существенно самосопряжен.

Для существенно самосопряженных операторов доказанный выше критерий самосопряженности принимает более простой вид.

Следствие 13. *Пусть T – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *оператор T существенно самосопряжен.*
2. $\mathrm{Ker}(T^* + iI) = \mathrm{Ker}(T^* - iI) = 0$.
3. *области значений* $\mathrm{Im}(T + iI)$ *и* $\mathrm{Im}(T - iI)$ *плотны в H.*

6.2 Лекция XXI. Спектральная теорема

6.2.1 Спектральная теорема в терминах оператора умножения

Начнем с изучения оператора умножения на измеримую функцию в пространстве $L^2(M, d\mu)$. Свойства этого оператора суммируются в двух нижеследующих предложениях.

Предложение 40. *Пусть* (M,μ) *– пространство с конечной мерой* μ *и* $f : M \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *– измеримая функция на* M, *принимающая конечные значения почти всюду по мере* μ. *Рассмотрим порождаемый ею оператор умножения в пространстве* $L^2(M,d\mu)$:

$$T_f : \varphi \longmapsto f\varphi,$$

область определения которого совпадает с

$$D(T_f) = \{\varphi \in L^2(M,d\mu) :\ f\varphi \in L^2(M,d\mu)\}.$$

Тогда оператор T_f *самосопряжен и его спектр* $\sigma(T_f)$ *совпадает с существенной областью значений функции* f.

Напомним, что существенная область значений функции f состоит из вещественных чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что для любого $\epsilon > 0$ мера множества $\{x \in M : \lambda-\epsilon < f(x) < \lambda+\epsilon\}$ отлична от нуля.

Доказательство. Оператор T_f, очевидно, симметричен, поскольку функция f вещественна. Предположим, что функция $\psi \in D(T_f^*)$. Рассмотрим функцию

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |f(x)| \le N, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теореме о монотонной сходимости

$$\|T_f^*\psi\|_{L^2} = \lim_{N\to\infty} \|\chi_N T_f^*\psi\| = \lim_{N\to\infty} \sup_{\|\varphi\|=1} \big|(\varphi, \chi_N T_f^*\psi)\big| =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{\|\varphi\|=1} |(T_f\chi_N\varphi,\psi)| = \lim_{N\to\infty} \sup_{\|\varphi\|=1} |(f\chi_N\varphi,\psi)| =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{\|\varphi\|=1} |(\varphi, f\chi_N\psi)| = \lim_{N\to\infty} \|\chi_N f\psi\|_{L^2}.$$

Поэтому $f\psi \in L^2(M,d\mu)$, т.е. $\psi \in D(T_f)$ и, следовательно, оператор T_f самосопряжен.

Второе утверждение предложения доказывается также, как в случае существенно ограниченных функций (см. предложение 24 из п. 5.2.3). □

Предложение 41. *Пусть функция* f *и оператор* T_f *такие же, как в предыдущем предложении. Предположим также, что* $f \in L^p(M,d\mu)$ *для некоторого* p *с* $2 < p < \infty$. *Фиксируем число* q *такое, что* $1/q + 1/p = 1/2$ *и предположим, что* E *– произвольное плотное подмножество в пространстве* $L^q(M,d\mu)$. *Тогда* E *является существенной областью определения оператора* T_f, *т.е.* $\overline{T_f|E} = T_f$.

Доказательство. Докажем сначала, что само пространство $L^q(M,d\mu)$ является существенной областью определения оператора T_f. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\|g\|_{L^2} \le \|1\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q} \quad \text{и} \quad \|fg\|_{L^2} \le \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$$

для любой функции $g \in L^q(M,d\mu)$. Поэтому пространство $L^q(M,d\mu)$ содержится в области определения $D(T_f)$.

С другой стороны, если функция $g \in D(T_f)$, то рассмотрим аппроксимирующую ее функцию g_N вида

$$g_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |g(x)| > N, \\ g(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$g_N \to g \quad \text{и} \quad fg_N \to fg$$

в пространстве $L^2(M, d\mu)$. Так как каждая из функций $g_N \in L^q(M, d\mu)$, то мы получаем, что замыкание ограничения $T_f|L^q(M, d\mu)$ содержится в $D(T_f)$, т.е. $L^q(M, d\mu)$ является существенной областью определения оператора T_f.

Пусть, теперь, E – плотное подмножество в пространстве $L^q(M, d\mu)$ и g – функция из $L^q(M, d\mu)$. Тогда найдется последовательность функций $g_n \in E$ такая, что $g_n \to g$ в $L^q(M, d\mu)$. Из неравенств

$$\|g_n - g\|_{L^2} \le \|1\|_{L^p} \cdot \|g_n - g\|_{L^q} \quad \text{и} \quad \|f(g_n - g)\|_{L^2} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g_n - g\|_{L^q}$$

следует, что функция g принадлежит области определения оператора $\overline{T_f|E}$, т.е. $D(\overline{T_f|E}) \supset L^q(M, d\mu)$ и, следовательно, E является существенной областью определения оператора T_f. □

Теорема 59 (спектральная теорема в терминах оператора умножения)**.** *Пусть A – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$. Тогда существует пространство (M, μ) с конечной мерой μ, унитарный оператор $U : H \to L^2(M, d\mu)$ и измеримая функция $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, принимающая конечные значения почти всюду по мере μ, такие что:*

1. *$v \in D(A) \Longleftrightarrow f(x)(Uv)(x) \in L^2(M, d\mu)$;*
2. *если $\varphi \in U(D(A))$, то $(UAU^{-1}\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$.*

Доказательство. Из критерия самосопряженности (теорема 58 из п. 6.1.4) следует, что операторы $A \pm iI$ задают взаимнооднозначные отображения и их образы совпадают с H. Так как эти операторы по той же теореме замкнуты, то замкнуты и обратные к ним операторы $(A \pm iI)^{-1}$. Но эти операторы заданы на всем пространстве H, поэтому по теореме о замкнутом графике они ограничены. Кроме того, по теореме о резольвенте операторы $(A + iI)^{-1}$ и $(A - iI)^{-1}$ коммутируют между собой.

Заметим далее, что при $u, v \in D(A) = D(A^*)$ справедливо равенство

$$((A - iI)u, v) = (u, (A + iI)v)\,.$$

Обе части этого равенства можно записать в виде

$$((A - iI)u, v) = \big((A - iI)u, (A + iI)^{-1}(A + iI)v\big)$$

и

$$(u, (A + iI)v) = \big((A - iI)^{-1}(A - iI)u, (A + iI)v\big)\,,$$

откуда

$$\big((A-iI)u,(A+iI)^{-1}(A+iI)v\big)=\big((A-iI)^{-1}(A-iI)u,(A+iI)v\big)$$

при всех $u,v\in D(A)$. Обозначая $z:=(A+iI)v$ и $w:=(A-iI)u$, получим из последнего равенства, что

$$\big(w,(A+iI)^{-1}z\big)=\big((A-iI)^{-1}w,z\big)$$

для всех $w,z\in H$, поскольку $\mathrm{Im}(A\pm iI)=H$. Иначе говоря, $[(A\pm iI)^{-1}]^*=((A\mp iI)^{-1}$. Отсюда следует, что операторы $(A\pm iI)^{-1}$ нормальны, поскольку операторы $(A+iI)^{-1}$ и $(A-iI)^{-1}$ коммутируют между собой.

Воспользуемся теперь спектральной теоремой для нормальных операторов (см. п. 5.3.4), согласно которой существуют пространство (M,μ) с конечной мерой, унитарный оператор $U:H\to L^2(M,d\mu)$ и измеримая ограниченная функция g на M такие, что

$$\big[U(A+iI)^{-1}U^{-1}\varphi\big](x)=g(x)\varphi(x)$$

для почти всех $x\in M$ и всех $\varphi\in L^2(M,d\mu)$.

Так как ядро $\mathrm{Ker}(A+iI)^{-1}=0$, то функция $g(x)$ отлична от нуля почти всюду по мере μ. Поэтому функция

$$f(x):=\frac{1}{g(x)}-i$$

конечна для почти всех $x\in M$.

Докажем первое утверждение теоремы. Предположим, что вектор $v\in D(A)$. Тогда $v=(A+iI)^{-1}w$ для некоторого $w\in H$ и

$$Uv=U(A+iI)^{-1}w=g(Uw). \tag{6.5}$$

Отсюда $f(Uv)=fg(Uw)\in L^2(M,d\mu)$, так как функция $fg=1-ig$ ограничена, а $Uw\in L^2(M,d\mu)$.

Обратно, если $f(Uv)\in L^2(M,d\mu)$, то существует такой вектор $w\in H$, который унитарный оператор U переводит в функцию $(f+i)(Uv)\in L^2(M,d\mu)$: $Uw=(f+i)(Uv)$. Следовательно,

$$g(Uw)=g(f+i)(Uv)=Uv.$$

Отсюда по формуле (6.5) получаем, что

$$g(Uw)=U(A+iI)^{-1}w=Uv\Longrightarrow(A+iI)^{-1}w=v,$$

т.е. $v\in D(A)$. Этим доказывается первое утверждение Теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что если $v=U^{-1}\varphi\in D(A)$, то $v=(A+iI)^{-1}w$ для некоторого $w\in H$ и $Av=w-iv$. Поэтому

$$(UAV)(x)=(Uw)(x)-i(Uv)(x)=(f+i)(Uv)(x)-i(Uv)(x)=f(Uv)(x)=f(x)\varphi(x).$$

Осталось проверить вещественность функции f. Допустим, напротив, что $\mathrm{Im}\,f>0$ на множестве ненулевой меры. Тогда найдется ограниченное множество B в верхней полуплоскости такое, что множество $S=\{x:\ f(x)\in B\}$

имеет ненулевую меру. Если χ – характеристическая функция этого множества, то $f\chi \in L^2(M, d\mu)$ и $\operatorname{Im}(\chi, f\chi) > 0$. Последнее противоречит самосопряженности оператора умножения на функцию f в пространстве $L^2(M, d\mu)$ (напомним, что этот оператор унитарно эквивалентен самосопряженному оператору A). В случае, если $\operatorname{Im} f < 0$ на множестве ненулевой меры, достаточно перейти к функции $-f$. Это доказывает вещественность функции f. □

6.2.2 Функциональное исчисление для неограниченных функций

Построенное нами ранее функциональное исчисление для ограниченных функций (см. теорему 49 из п. 5.1.2) сопоставляет каждой функции f из пространства $L^\infty(\mathbb{R})$ ограниченный оператор $\Psi(f)$ в гильбертовом пространстве H. Теперь мы распространим это соответствие на неограниченные измеримые функции.

Пусть $\{P_E\}$ есть произвольная проекторнозначная мера на борелевской алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ со значениями в гильбертовом пространстве H. Проекторнозначная мера $\{P_E\}$ определяет для любых $u, v \in H$ скалярную меру $d(P_\lambda u, v)$. Рассмотрим отображение Ψ, которое сопоставляет функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ оператор

$$(\Psi(f)u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(P_\lambda u, v).$$

Мы хотим распространить это отображение на неограниченные измеримые функции.

Лемма 11. *Пусть f – измеримая борелевская функция на прямой $\mathbb{R}$. Положим*

$$D_f = \{u \in H : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u) < \infty\}.$$

Тогда D_f – всюду плотное подпространство в H и для любого $v \in H$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d|(P_\lambda u, v)| \leq \|v\| \left[\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u)\right]^{1/2}. \tag{6.6}$$

Если функция f ограничена и $v = \Psi(f)w$, то

$$d(P_\lambda u, v) = \bar{f} d(P_\lambda u, w). \tag{6.7}$$

Доказательство. Множество D_f замкнуто относительно сложения, поскольку если $w = u + v$, то для любого борелевского подмножества E на прямой справедливо неравенство

$$\|P_E w\|^2 \leq (\|P_E u\| + \|P_E v\|)^2 \leq 2\|P_E u\|^2 + 2\|P_E v\|^2,$$

т.е. $(P_E w, w) \leq 2(P_E u, u) + 2(P_E v, v)$. Замкнутость D_f относительно умножения на скаляры очевидна. Таким образом, D_f – линейное подпространство в H.

Обозначим для произвольного натурального N через F_N борелевское подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из всех точек λ, для которых $|f(\lambda)| < N$. Если вектор u лежит в образе проектора P_{F_N}, то для любого борелевского множества E имеет место соотношение

$$P_E u = P_E P_{F_N} u = P_{E \cap F_N} u,$$

откуда

$$(P_E u, u) = (P_{E\cap F_N} u, u)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u) = \int_{F_N} |f|^2 d(P_\lambda u, u) \leq N^2 \|u\|^2 < \infty.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} P_{F_N} \subset D_f$. Возьмем теперь произвольный вектор $v \in H$. Так как объединение множеств F_N по всем натуральным N совпадает с $\mathbb{R}$, то из счетной аддитивности меры $P_E v$ (см. замечание 19 из п. 5.3.1) следует, что $v = \lim_{N\to\infty} P_{E_N} v$, т.е. вектор v принадлежит замыканию D_f. Тем самым, D_f плотно в H.

Перейдем к доказательству оценки (6.6). Если $u, v \in H$, а f – ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}$, то мера $|f|d|(P_\lambda u, v)|$ абсолютно непрерывна относительно меры $fd(P_\lambda u, v)$. Поэтому по теореме Радона–Никодима (теорема 11 из п. 2.3.4) существует измеримая функция g на $\mathbb{R}$ такая, что

$$|f|d|(P_\lambda u, v)| = gfd(P_\lambda u, v).$$

Из последнего равенства вытекает, что $|g| = 1$ почти всюду. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} |f|d|(P_\lambda u, v)| = \int_{\mathbb{R}} gfd(P_\lambda u, v) = (\Psi(gf)u, v) \leq \|\Psi(gf)u\| \cdot \|v\|.$$

По теореме 49 о функциональном исчислении для ограниченных функций (см. п. 5.1.1)

$$\|\Psi(gf)u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |gf|^2 d(P_\lambda u, u) = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u).$$

Последние две формулы показывают, что неравенство (6.6) справедливо для всех ограниченных измеримых функций f, а потому и для любых измеримых функций. Для доказательства этого достаточно приблизить произвольную измеримую функцию f ее ограниченными срезками f_N.

Доказательство равенства (6.7). Если f и g – произвольные ограниченные измеримые функции, то по теореме 49 о функциональном исчислении для ограниченных функций для вектора $v = \Psi(f)w$ будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} gd(P_\lambda u, v) = (\Psi(g)u, v) = (\Psi(g)u, \Psi(f)w)$$
$$= \big(\Psi(\overline{f})\Psi(g)u, w\big) = \big(\Psi(\overline{f}g)u, w\big) = \int_{\mathbb{R}} g\overline{f} d(P_\lambda u, w),$$

откуда следует справедливость равенства (6.7). □

Теорема 60 (теорема о функциональном исчислении в классе неограниченных борелевских функций). *Пусть $\{P_E\}$ есть проекторнозначная мера на борелевской алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ со значениями в гильбертовом пространстве H. Сопоставим произвольной борелевской функции f на $\mathbb{R}$ полуторалинейную форму*

$$(\Psi(f)u, v) = \int_{\mathbb{R}} fd(P_\lambda u, v) \tag{6.8}$$

для $v \in H$, $u \in D_f$, *где*

$$D_f = \{u \in H : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u) < \infty\}.$$

Формула (6.8) *определяет замкнутый оператор* $\Psi(f)$ *в* H *с плотной областью определения* $D(\Psi(f)) = D_f$, *удовлетворяющий соотношению*

$$\|\Psi(f)u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u) \tag{6.9}$$

при $u \in D_f$.

Построенное отображение Ψ *мультипликативно в том смысле, что для любых измеримых функций* f, g *справедливо соотношение*

$$\Psi(f)\Psi(g) \subset \Psi(fg) \quad \text{и} \quad D(\Psi(f)\Psi(g)) = D_g \cap D_{fg}.$$

Кроме того, для произвольной борелевской функции f *имеют место соотношения*

$$\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f}) \tag{6.10}$$

и

$$\Psi(f)\Psi(f)^* = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)^*\Psi(f).$$

Доказательство. Если $u \in D_f$, то отображение

$$v \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f d(P_\lambda u, v)$$

задает ограниченный сопряженно-линейный функционал на H, норма которого в силу оценки (6.6) из леммы 11 не превосходит

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u)\right]^{1/2}.$$

Поэтому по теореме Рисса найдется единственный вектор $\Psi(f)u \in H$, удовлетворяющий соотношению (6.8) для всех $v \in H$, причем

$$\|\Psi(f)u\|^2 \le \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d(P_\lambda u, u) \tag{6.11}$$

при $u \in D_f$. Линейность построенного оператора $\Psi(f)$ на D_f вытекает из линейности меры $d(P_\lambda u, v)$ по u.

Пусть f – произвольная измеримая функция и f_N – ее срезка, т.е.

$$f_N(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & \text{если } |f(\lambda)| \le N, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как функция f_N при любом натуральном N ограничена, то область определения D_{f-f_N} совпадает с D_f и потому из неравенства (6.11) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\|\Psi(f)u - \Psi(f_N)u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f - f_N|^2 d(P_\lambda u, u) \longrightarrow 0 \tag{6.12}$$

при $N \to \infty$ для любого $u \in D_f$. Так как функции f_N ограничены, то для них выполняется соотношение (6.9). Но тогда оно сохранится и для функции f.

Остается проверить замкнутость оператора $\Psi(f)$. Заметим, что из соотношения (6.10) следует, что

$$\Psi(f) = \Psi(\overline{f})^*,$$

а оператор, сопряженный к оператору с плотной областью определения, всегда замкнут (см. предложение 37 из п. 6.1.2).

Остальные утверждения теоремы мы оставляем без доказательства (которое можно найти в книге [Рудин]). □

Замечание 22. Теорема о функциональном исчислении в классе неограниченных борелевских функций верна в гораздо более общей постановке. В частности, в ней можно заменить вещественную ось $\mathbb{R}$ и σ-алгебру борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ на произвольное множество M, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{R}$. Доказательство теоремы переносится на этот случай почти без изменений (см. [Рудин], теорема 13.24).

6.2.3 Дополнение: преобразование Кэли

Преобразование Кэли обобщает на операторный случай дробно-линейное отображение

$$\lambda \longmapsto \frac{\lambda - i}{\lambda + i},$$

переводящее вещественную ось в единичную окружность (без точки 1). По теореме 49 о функциональном исчислении для ограниченных функций мы можем сопоставить каждому ограниченному самосопряженному оператору A унитарный оператор

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1},$$

причем таким образом получается любой унитарный оператор U, спектр которого не содержит точку 1.

Предположим теперь, что T есть симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда при любом $u \in D(T)$ выполняется соотношение

$$\|Tu + iu\|^2 = \|Tu\|^2 + \|u\|^2 + (iu, Tu) + (Tu, iu) \text{ (ввиду симметричности } T)$$
$$= \|Tu\|^2 + \|u\|^2 = \|Tu - iu\|^2. \quad (6.13)$$

Поэтому существует изометрический оператор $U : D(U) \to \operatorname{Im} U$, где

$$D(U) = \operatorname{Im}(T + iI), \quad \operatorname{Im} U = \operatorname{Im}(T - iI),$$

который определяется формулой

$$U(T + iI)u = (T - iI)u \quad \text{при } u \in D(T).$$

Из формулы (6.13) следует, что оператор $T + iI$, заданный на подпространстве $D(T)$, инъективен, поэтому определен оператор

$$(T + iI)^{-1} : \operatorname{Im}(T + iI) = D(U) \longrightarrow D(T),$$

взаимнооднозначно отображающий $D(U)$ на $D(T)$. Поэтому оператор U можно записать в виде

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}.$$

Оператор U называется *преобразованием Кэли* оператора T. Он обладает следующими свойствами.

Предложение 42. *Пусть оператор U является преобразованием Кэли симметрического оператора T. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *оператор U замкнут тогда и только тогда, когда замкнут оператор T;*

2. $\mathrm{Im}(I - U) = D(T)$, *оператор $I - U$ инъективен и оператор T восстанавливается по оператору U по формуле*

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}.$$

3. *оператор U унитарен тогда и только тогда, когда оператор T самосопряжен.*

Обратно, если U такой изометрический оператор, что оператор $I - U$ инъективен, то U является преобразованием Кэли некоторого симметрического оператора T.

6.2.4 Спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер

Теорема 61 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер)**.** *Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует проекторнозначная мера $\{P_E\}$, заданная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, такая что*

$$(Au, v) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(P_\lambda u, v) \tag{6.14}$$

для $u \in D(A), v \in H$.

Мера $\{P_E\}$ обладает тем свойством, что $P_{\sigma(A)} = I$, и называется спектральной мерой оператора A.

Доказательство. Пусть U есть преобразование Кэли оператора A и $\{Q_F\}$ – проекторнозначная мера на окружности S' с выколотой точкой 1, отвечающая оператору U в силу спектральной теоремы 54 для нормальных операторов (см. п. 5.3.4).

Так как оператор $I - U$ инъективен в силу предложения 42 из предыдущего параграфа, то по этой теореме

$$(Uu, v) = \int_{S'} \zeta d(Q_\zeta u, v) \tag{6.15}$$

при $u, v \in H$. Введем функцию

$$f(\zeta) = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

при $\zeta \in S'$ и определим оператор $\Psi(f)$, полагая

$$(\Psi(f)u, v) = \int_{S'} f(\zeta) d(Q_\zeta u, v)$$

при $u \in D_f, v \in H$.

По теореме 60 о функциональном исчислении для неограниченных функций (см. замечание 22 из п. 6.2.2) оператор $\Psi(f)$ самосопряжен, поскольку функция f вещественна. Кроме того, из равенства $f(\zeta)(1-\zeta) = i(1+\zeta)$ получаем по той же теореме, что

$$\Psi(f)(I-U) = i(I+U). \tag{6.16}$$

Из этого соотношения вытекает, в частности, что $\mathrm{Im}(I-U) \subset D(\Psi(f))$.

С другой стороны, согласно предложению 42 из предыдущего параграфа

$$A(I-U) = i(I+U), \tag{6.17}$$

причем $D(A) = \mathrm{Im}(I-U)$, откуда $D(A) \subset D(\Psi(f))$.

Из формул (6.16), (6.17) следует, что оператор $\Psi(f)$ является самосопряженным расширением оператора A. Но оператор A уже самосопряжен, поэтому $A = \Psi(f)$ (поскольку самосопряженные операторы являются максимальными симметрическими операторами). Следовательно,

$$(Au, v) = \int_{S'} f(\zeta) d(Q_\zeta u, v) \tag{6.18}$$

при $u \in D(A), v \in H$.

Как было отмечено ранее, спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с множеством существенных значений функции f, откуда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Поскольку функция f взаимнооднозначно отображает окружность S' на вещественную ось $\mathbb{R}$, мы можем ввести спектральную меру $\{P_E\}$ на прямой, полагая

$$P_{f(F)} = Q_F$$

для любого борелевского подмножества $F \subset S'$. Тем самым, соотношение (6.18) превращается в

$$(Au, v) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(P_\lambda u, v)$$

при $u \in D(A), v \in H$. □

Имеется также вариант спектральной теоремы для неограниченных нормальных операторов. По определению, линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *нормальным*, если он замкнут, имеет плотную область определения $D(T)$ и удовлетворяет условию

$$T^*T = TT^*$$

на $D(T) \cap D(T^*)$.

Теорема 62 (спектральная теорема для нормальных операторов)**.** *Пусть T – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует проекторнозначная спектральная мера $\{P_E\}$ такая, что*

$$(Tu, v) = \int_{\sigma(T)} \lambda d(P_\lambda u, v)$$

при $u \in D(T), v \in H$.

6.3 Лекция XXII. Однопараметрические группы операторов

6.3.1 Экспонента от самосопряженного оператора

Экспоненту от ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H можно определить при помощи ряда

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n A^n}{n!} \,,$$

который сходится по норме. В случае неограниченного самосопряженного оператора A указанную экспоненту можно ввести с помощью спектральной теоремы как функцию e^{itA} от S.

Теорема 63. *Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Оператор $U(t) := e^{itA}$ обладает следующими свойствами:*

1. *для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен и*

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad \text{для любых } s, t \in \mathbb{R};$$

2. *для любого $v \in H$ существует предел $U(t)v \to v$ при $t \to 0$;*
3. *при $v \in D(A)$ справедливо соотношение*

$$\frac{U(t)v - v}{t} \longrightarrow iAv \quad \text{при } t \to 0;$$

4. *если предел*

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(t)v - v}{t}$$

существует, то $v \in D(A)$.

Доказательство. Утверждение (1) немедленно вытекает из теоремы о функциональном исчислении для неограниченных функций (см. п. 6.2.2).

Утверждение (2). Заметим, что по теореме о функциональном исчислении для неограниченных функций

$$\|e^{itA}v - v\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 d(P_\lambda v, v).$$

Функцию $|e^{it\lambda} - 1|^2$ можно оценить сверху функцией $f(\lambda) \equiv 4$, которая интегрируема по мере $d(P_\lambda v, v)$. Кроме того,

$$|e^{it\lambda} - 1|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \to 0$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\|U(t)v - v\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \to 0,$$

т.е. функция $t \mapsto U(t)$ сильно непрерывна в нуле.

Утверждение (3) вытекает из той же теоремы Лебега и оценки

$$|e^{it\lambda} - 1| \leq |t\lambda|.$$

Утверждение (4). Обозначим через $D(B)$ множество

$$D(B) = \{v \in H : \lim_{t\to 0} \frac{U(t)v - v}{t} \text{ существует}\}$$

и введем оператор B с областью определения $D(B)$, полагая

$$iBv = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)v - v}{t}.$$

Это симметрический оператор (проверьте!), который согласно утверждению (3) является расширением A, т.е. $B \supset A$. Но оператор A самосопряжен, поэтому $B = A$. □

Определение 64. Операторная функция $t \mapsto U(t)$, удовлетворяющая условиям (1),(2) последней теоремы, называется *сильно непрерывной однопараметрической унитарной группой*. Если A – самосопряженный оператор такой, что $U(t) = e^{itA}$, то A называется *инфинитезимальным генератором* группы $U(t)$.

Замечание 23. Заметим, что из сильной непрерывности функции $t \mapsto U(t)$ в нуле вытекает и ее непрерывность в произвольной точке $t_0 \in \mathbb{R}$ ввиду группового свойства.

6.3.2 Теорема Стоуна

Теорема 64 (теорема Стоуна). *Пусть $\{U(t)\}$ – сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа в гильбертовом пространстве H. Тогда существует самосопряженный оператор A такой, что*

$$U(t) = e^{itA}.$$

Доказательство. Утверждение (4) из последней теоремы подсказывает, что оператор A можно получить из $\{U(t)\}$ дифференцированием при $t = 0$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Введем для каждого $v \in H$ функцию

$$t \longmapsto f_\varphi := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)U(t)v dt.$$

Так как функция $\{U(t)\}$ сильно непрерывна, то интеграл в последней формуле можно понимать как риманов интеграл от непрерывной вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве. Такой интеграл определяется также, как в скалярном случае, и обладает аналогичными свойствами.

Обозначим через D пространство, элементами которого являются конечные линейные комбинации векторов f_φ с $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $v \in H$. Введем далее семейство функций $\{\chi_\epsilon(t)\}$ на $\mathbb{R}$, определяемое следующим образом. Пусть $\chi(t)$ –

некоторая положительная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем на интервале $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$, интеграл от которой по этому интервалу равен 1:

$$\int_{-1}^{1} \chi(t)dt = 1.$$

Положим:

$$\chi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\chi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

и обозначим: $f_\epsilon = f_{\chi_\epsilon}$. Тогда

$$\|f_\epsilon - v\| = \|\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\epsilon(t)\left[U(t)v - v\right]dt\| \le \sup_{(-\epsilon,\epsilon)} \|U(t)v - v\| \cdot \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \chi_\epsilon(t)dt.$$

Так как функция $\{U(t)\}$ сильно непрерывна, то отсюда следует, что пространство D плотно в H.

При $f_\varphi \in D$ будем иметь

$$\frac{U(s)f_\varphi - f_\varphi}{s} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\frac{U(s+t)v - U(t)v}{s}dt \text{ (замена } s+t=\tau \text{ в первом интеграле)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau - s)\frac{U(\tau)v}{s}d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\frac{U(t)v}{s}dt \text{ (замена } t=\tau \text{ во втором интеграле)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau - s) - \varphi(\tau)}{s}U(\tau)v d\tau.$$

Последний интеграл при $s \to 0$ стремится к

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\tau)U(\tau)v d\tau = f_{-\varphi'}.$$

Определим оператор A на функциях $f_\varphi \in D$, полагая

$$Af_\varphi = \frac{1}{i}f_{-\varphi'}.$$

Из проведенного вычисления следует, что при $s \to 0$

$$\frac{U(s+t) - U(t)}{s}f_\varphi = U(t)\frac{U(s) - I}{s}f_\varphi \longrightarrow U(t)f_{-\varphi'} = iU(t)Af_\varphi.$$

Иначе говоря,

$$\frac{d}{dt}U(t)v = iU(t)Av \quad \text{для всех } v \in D.$$

Заметим, что операторы $U(t)$ и A сохраняют пространство D и

$$U(t)Af_\varphi = AU(t)f_\varphi \quad \text{при } f_\varphi \in D.$$

Более того, если $f_\varphi, f_\psi \in D$, то

$$(Af_\varphi, f_\psi) = \lim_{s\to 0}\left(i\frac{U(s)f_\varphi - f_\varphi}{s}, f_\psi\right) = \lim_{s\to 0}\left(f_\varphi, -i\frac{f_\psi - U(-s)f_\psi}{s}\right) =$$

$$= (f_\varphi, f_{-\psi'}) = (f_\varphi, Af_\psi),$$

т.е. A – симметрический оператор с областью определения $D(A) = D$.

Покажем, что A существенно самосопряжен, т.е. его замыкание $\overline{A}$ самосопряжено. Для этого, согласно критерию самосопряженности (см. следствие 13 из п. 6.1.4), достаточно проверить, что $\operatorname{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$. Допустим, что нашелся вектор $u \in D(A^*)$ такой, что $A^*u = iu$. Тогда для любого $v \in D$ будем иметь

$$\frac{d}{dt}\,(U(t)v, u) = (iAU(t)v, u) = i\,(U(t)v, A^*u) = (U(t)v, u)\,.$$

Иными словами, функция $g(t) = (U(t)v, u)$ удовлетворяет уравнению $g' = g$, поэтому $g(t) = g(o)e^t$. Но $g(0) = (U(0)v, u) = (v, u)$ должно равняться нулю, поскольку функция $g(t)$ удовлетворяет оценке $|g(t)| \leq \|v\| \cdot \|u\|$, т.е. ограничена на всей оси и, следовательно, не может расти как экспонента. Тем самым, вектор u ортогонален всем векторам вида $U(t)v$ с $v \in D$, откуда следует, ввиду плотности D в H, что $u = 0$.

Аналогичное доказательство показывает, что и уравнение $A^*u = -iu$ не может иметь ненулевых решений. Поэтому оператор A существенно самосопряжен.

Положим $V(t) := e^{it\overline{A}}$ и покажем, что $U(t) = V(t)$. Если $v \in D \subset D(\overline{A})$, то в силу утверждения (3) из теоремы 63 из предыдущего параграфа

$$\frac{d}{dt}V(t)v = i\overline{A}V(t)v.$$

Так как $U(t)v \in D \subset D(\overline{A})$, то для дифференцируемой вектор-функции $h(t) := U(t)v - V(t)v$ будем иметь

$$\frac{d}{dt}h(t) = iAU(t)v - i\overline{A}V(t)v = i\overline{A}h(t),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\|h(t)\|^2 = i\left(\overline{A}h(t), h(t)\right) - i\left(h(t), \overline{A}h(t)\right) = 0.$$

Кроме того, $h(0) = 0$, поэтому $h(t) = 0$ при всех t, т.е. $U(t)v = V(t)v$ при всех t и всех $v \in D$. Из плотности D в H следует, что $U(t) = V(t)$ при всех t. □

В заключение исследуем вопрос о сильной непрерывности однопараметрических унитарных групп. Предположим сначала, что $U(t)$ – слабо непрерывная однопараметрическая унитарная группа. Тогда при $t \to 0$ будем иметь

$$\|U(t)v - v\|^2 = \|U(t)v\|^2 - (U(t)v, v) - (v, U(t)v) + \|v\|^2 \longrightarrow 2\|v\|^2 - 2\|v\|^2 = 0.$$

Иными словами, из слабой непрерывности функции $U(t)$ следует ее сильная непрерывность. На самом деле, справедлив гораздо более сильный результат.

Теорема 65 (теорема фон Неймана)**.** *Пусть $\{U(t)\}$ – однопараметрическая унитарная группа в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что функция $t \mapsto (U(t)u, v)$ измерима для любых $u, v \in H$. Тогда группа $\{U(t)\}$ сильно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $u \in H$. Тогда для всех $v \in H$ функция $(U(t)u, v)$ измерима, а отображение

$$v \longmapsto \int_0^a (U(t)u, v)\, dt$$

задает ограниченный сопряженно-линейный функционал на H, норма которого не превосходит $a\|u\|$. Поэтому по теореме Рисса (см. замечание 7 к этой теореме) существует вектор $u_a \in H$ такой, что

$$(u_a, v) = \int_0^a (U(t)u, v)\, dt.$$

Тогда при $b < a$ будем иметь

$$(U(b)u_a, v) = (u_a, U(-b)v) = \int_0^a (U(t)u, U(-b)v)\, dt = \\ = \int_0^a (U(t+b)u, v)\, dt = \int_b^{a+b} (U(t)u, v)\, dt,$$

откуда

$$|(U(b)u_a, v) - (u_a, v)| = \int_b^{a+b} (U(t)u, v)\, dt - \int_0^a (U(t)u, v)\, dt.$$

Представляя полученную разность двух интегралов в виде

$$\int_b^{a+b} - \int_0^a = \int_a^{a+b} + \int_b^a - \int_b^a - \int_0^b = \int_a^{a+b} - \int_0^b,$$

получим, что

$$|(U(b)u_a, v) - (u_a, v)| \le \left| \int_a^{a+b} (U(t)u, v)\, dt \right| + \left| \int_0^b (U(t)u, v)\, dt \right|.$$

Но

$$\int_a^{a+b} (U(t)u, v)\, dt = \int_0^b (U(\tau + a)u, v)\, d\tau,$$

поэтому из последнего неравенства вытекает, что

$$|(U(b)u_a, v) - (u_a, v)| \le 2b\|u\| \cdot \|v\|$$

и, следовательно, $(U(b)u_a, v) \to (u_a, v)$ при $b \to 0$. Тем самым, группа $\{U(t)\}$ слабо, а потому и сильно непрерывна на множестве векторов $\{u_a :\ u \in H\}$.

Если мы покажем, что это множество плотно в H, то отсюда будет следовать (с помощью стандартного $\epsilon/3$-приема), что группа $\{U(t)\}$ сильно непрерывна на H.

Предположим, что вектор v ортогонален всем векторам из множества $\{u_a : u \in H\}_{a \in \mathbb{R}}$. Выберем ортонормированный базис $\{u^{(n)}\}$ в H. Тогда для любого n будем иметь

$$0 = (u_a^{(n)}, v) = \int_0^a \big(U(t)u^{(n)}, v\big)\, dt$$

при всех $a \in \mathbb{R}$. Отсюда $\big(U(t)u^{(n)}, v\big) = 0$ для всех t, кроме, быть может, некоторого множества S_n меры нуль. Выберем $t_0 \notin \cup_n S_n$. Тогда $\big(U(t_0)u^{(n)}, v\big) = 0$ при всех n, откуда следует, что $U(-t_0)v = 0$ и, ввиду унитарности $U(-t_0)$, получаем, что $v = 0$. □

Краткое содержание и библиографические указания к главе 6

В лекции 6.1 излагаются основные определения, относящимся к неограниченным операторам, следуя в основном [7], гл.VIII, п.1, только предложение 38 заимствовано из [9], п.13.2. Здесь доказывается предложение 37 о связи между операциями замыкания и взятия сопряженного оператора. Главным результатом этой лекции является критерий самосопряженности (теорема 58).

Лекция 6.2 посвящена спектральной теореме для неограниченных самосопряженных операторов, которую мы излагаем, следуя в основном [9], гл.13. Сначала мы доказываем спектральную теорему в терминах оператора умножения также, как в [7], гл.VIII, п.3. Затем приводим теорему о функциональном исчислении в классе неограниченных борелевских функций, следуя [9], гл.13, п.13.22-13.24. В изложении спектральной теоремы в терминах проекторнозначных мер мы следуем [9], гл.13, п.13.30. Доказательство указанной теоремы основано на преобразовании Кэли, которое обсуждается в дополнении 6.2.3. Подробнее об этом преобразовании см. [9], гл.13, п.13.17-13.19. Завершается лекция спектральной теоремой для нормальных операторов, доказательство которой можно найти в [9], гл.13, п.13.33.

Лекция 6.3 посвящена однопараметрическим группам унитарных операторов. В ее изложении мы следуем [7], гл.VIII, п.4. Здесь доказываются теорема Стоуна о существовании самосопряженного генератора у сильно непрерывной однопараметрической унитарной группы и критерий фон Неймана сильной непрерывности однопараметрической группы унитарных операторов.

Литература

[1] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, Москва, 1965.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж., *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, Москва, 1962.

[3] Келли Дж.Л., *Общая топология*, Наука, Москва, 1981.

[4] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д., *Теоремы и задачи функционального анализа*, Наука, Москва, 1979.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1972.

[6] Плеснер А.И., *Спектральная теория линейных операторов*, Наука, Москва, 1965.

[7] Рид М., Саймон Б., *Методы математической физики, т.1. Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1977.

[8] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., *Лекции по функциональному анализу*, Мир, Москва, 1979.

[9] Рудин У., *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975.

[10] Садовничий В.А., *Теория операторов*, МГУ, Москва, 1986.

[11] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2*, Мир, Москва, 1967.

[12] Хелемский А.Я., *Лекции и упражнения по функциональному анализу*, МЦНМО, Москва, 2004.

В приведенном списке литературы собраны только те книги, на которые есть ссылки в тексте лекций или которыми автор пользовался при их подготовке. По этой причине указанный список никоим образом не может претендовать на полноту.